2. soutěžní série

20. 10. 2025

Úloha 1. Kladná celá čísla n a $k_1, \ldots, k_n$ splňují rovnosti

$$k_1 + \cdots + k_n = 5n - 4 \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

Najděte všechna řešení. (5 bodů)

Úloha 2. Existují spojité funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $f(g(x)) = x^3 + x$ a $g(f(x)) = -x^3 - x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$? (10 bodů)

Úloha 3. Uvažujme posloupnost zadanou rekurentně $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ a pro $n \geq 0$ nechť platí

$$\det \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+2} & u_{n+3} \end{pmatrix} = n!.$$

Ukažte, že pro každé n je u_n celé číslo. (10 bodů)

Úloha 4. Uvnitř jednotkového kruhu se středem v počátku se nachází úsečky $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Součet jejich délek je alespoň $2\sqrt{n}$. Dokažte, že lze najít kružnici se středem v počátku, která protíná alespoň dvě z těchto úseček. (15 bodů)

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`