

## 2. soutěžní série – řešení

1. Nerovnost mezi harmonickým a aritmetickým průměrem dává

$$n = \frac{n}{\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n}} \leq \frac{k_1 + \dots + k_n}{n} = 5 - \frac{4}{n}.$$

Po úpravě na kvadratickou nerovnici získáme  $n \leq 4$ . Navíc pro  $n = 4$  musí nastat v A-H nerovnosti rovnost, tj. nutně  $k_i = 4$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Rozebráním případů  $n = 1, 2, 3$  získáme ještě řešení  $n = 1$ ,  $k_1 = 1$  a  $n = 3$ ,  $\{k_1, k_2, k_3\} = \{2, 3, 6\}$ .

2. Ne. Funkce  $x \mapsto x^3 + x$  je rostoucí, tedy prostá,  $x \mapsto -x^3 - x$  je klesající, tedy prostá. Proto musí být prosté i  $f$  a  $g$  (když  $f(a) = f(b)$ , tak  $g(f(a)) = g(f(b))$  neboli  $-a^3 - a = -b^3 - b$ , takže  $a = b$ , obdobně pro  $g$ ). Prostá spojitá funkce musí být monotónní. Kdyby však byly obě funkce rostoucí nebo obě klesající, byla by funkce  $g(f(x))$  rostoucí, takže by to nemohlo být  $-x^3 - x$ . Kdyby naopak byla jedna rostoucí a jedna klesající, byla by  $f(g(x))$  klesající, což rovněž nejde.

3. Snadno dokážeme indukci, že následující posloupnost splňuje rekurenci i počáteční podmínky:  $u_n = (n-1) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$  pro  $n$  sudé a  $u_n = (n-1) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2$  pro  $n$  lichá (tento předpis lze uhodnout z několika prvních členů). Zbývá dokázat, že tato posloupnost je jediným řešením (celočíslnost je pak evidentní). Důkaz indukci:  $u_0, u_1, u_2$  jsou jednoznačně určena a jsou nenulová. Je-li  $u_n \neq 0$ , pak  $u_{n+3} = \frac{1}{u_n}(n! - u_{n+1}u_{n+2})$  je jednoznačně určeno, tj. je dáno výše uvedeným předpisem, tj. také  $u_{n+3}$  je nenulové).

4. Označme  $l_i$  polovinu délky úsečky  $s_i$ . Tedy  $\sum l_i = \sqrt{n}$ . Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti plyne

$$n \left( \sum l_i^2 \right) = \left( \sum 1 \right) \left( \sum l_i^2 \right) \geq \left( \sum l_i \right)^2 = n,$$

tedy  $\sum l_i^2 \geq 1$ . Nyní vezmeme úsečku  $s_i$  a otočíme ji dokola kolem středu – tak vznikne mezikruží  $M_i$ , jeho obsah označme  $S_i$ . Dále označme  $R_i, r_i$  poloměry vnější a vnitřní kružnice  $M_i$ , pak  $S_i = \pi(R_i^2 - r_i^2)$ . Nejdelší možná úsečka v tomto mezikruží je taková, která se dotýká kružnice s poloměrem  $r_i$  a dosahuje oběma konci na kružnici s poloměrem  $R_i$  – délka takové úsečky je  $2(R_i^2 - r_i^2)$ , takže  $l_i \leq R_i^2 - r_i^2$ . Celkem

$$\sum S_i = \pi \sum (R_i^2 - r_i^2) \geq \pi \sum l_i^2 \geq \pi.$$

Protože je každá úsečka uvnitř jednotkového kruhu, je každé  $R_i < 1$ , a proto jednotlivá mezikruží nepokryjí celý jednotkový kruh (a bude k pokrytí chybět část s kladným obsahem) s obsahem  $\pi$ . Protože je ale i součet obsahů mezikruží roven  $\pi$ , musí se některá dvě mezikruží protínat – tato odpovídají úsečkám, které lze protnout jednou kružnicí se středem v počátku.

