

2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 27.10.2025

Úloha 1. Líza a Lojza hrají následující hru na mnohostěnu, který má aspoň pět stěn a z každého vrcholu vycházejí právě tři hrany. Líza obarví žlutě stěnu, kterou si vybere, pak Lojza obarví některou z dosud neobarvených stěn červeně, pak zase Líza některou neobarvenou žlutě a tak dále. Vyhrává ten, komu se podaří obarvit svou barvou všechny tři stěny sousedící s jedním vrcholem. Kdo má vyhrávající strategii?

Úloha 2. Nechtě $f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ je spojitá funkce a uvažme čísla x_n taková, že

$$\int_0^{x_n} f(x) dx = \frac{1}{n}$$

pro každé n větší než nějaké n_0 . Ukažte, že posloupnost nx_n konverguje a určete její limitu.

Úloha 3. Dokažte, že součin žádných čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel není čtverec. Je to pravda i pro součin libovolných pěti po sobě jdoucích přirozených čísel?

Úloha 4. Najděte všechny dvakrát diferencovatelné funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $f^2(x) - f^2(y) = f(x+y)f(x-y)$.

Úloha 5. Určete nejmenší číslo k takové, aby v každém konvexním 101-úhelníku byl součet délek libovolných k úhlopříček větší nebo roven součtu délek zbývajících úhlopříček.

★ **Úloha 6.** Určete

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\gcd(n, \lfloor n\sqrt{2} \rfloor)}{\sqrt{n}}.$$