

# 1. soutěžní série

6. 10. 2025

**Úloha 1.** Do tabulky  $n \times n$  napíšeme čísla  $1, 2, \dots, n^2$  popořadě tak, že nejprve vyplníme zleva doprava první řádek, potom druhý atd. Např. pro  $n = 3$  tedy dostaneme

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Nyní v tabulce vybereme  $n$  políček tak, abychom z každého řádku i každého sloupce vybrali právě jedno, a čísla na vybraných pozicích sečteme. Jaké možné výsledky můžeme dostat? (5 bodů)

**Úloha 2.** Mgr. Petr Stříhač, Ph.D. se ve výzkumném ústavu stužkostřížném zabývá stříháním stužek na úseky celočíselných délek. Pro stužku délky  $n$  označme  $A(n)$  počet různých výsledků, které může získat jejím rozstříháním na části délek aspoň 2 a  $B(n)$  počet různých výsledků s aspoň jedním kusem liché délky (výsledky, které se liší jen uspořádáním, považujeme za stejné). Ukažte, že  $A(2n + 1) \leq B(2n)$ . (10 bodů)

**Úloha 3.** Mějme pět reálných čísel, pro něž platí, že součet libovolných tří je větší než součet zbývajících dvou. Rozdíl těchto dvou součtů je tedy kladné číslo. Vynásobíme-li všech 10 takových rozdílů (pro všechny možné trojice čísel), pak výsledný součin je menší nebo roven druhé mocnině součinu původních čísel. Dokažte. (10 bodů)

**Úloha 4.** Existují spojité funkce  $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  takové, že pro všechna  $t \in [0, 1]$  platí  $f(t) \neq g(t)$  a  $f(g(t)) = g(f(t))$ ? (10 bodů)