1. soutěžní série – řešení

1. Nechť $\sigma(n)$ značí, kolikáté číslo se zvolilo v n-tém řádku. Potom je zvoleným číslem v prvním řádku $0{\cdot}n{+}\sigma(1)$, ve druhém $1{\cdot}n{+}\sigma(2)$, atd. až v posledním řádku je $(n{-}1){\cdot}n{+}\sigma(n)$. Jelikož $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ jsou jen nějak seřazená čísla $1, 2, \dots, n$, součet ze zadání je vždy roven

$$n \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n^2+1)n}{2}.$$

2. Mějme nějaké rozstříhání stužky dlouhé $2n+1$, které neobsahuje části délky 1. Rozstříhejme nyní některou z nejkratších částí (nechť má délku $k \geq 2$) na úseky délky 1 a jeden z nich zahoďme. Tím získáme rozstříhání stužky dlouhé $2n$, které obsahuje aspoň jeden úsek délky 1, tj. liché délky. Zbývá si uvědomit, že toto přiřazení je prosté. Zkusme ho invertovat: slepíme-li všechny úseky délky 1 a ještě k nim připojíme jeden navíc, získáme zpět původní rozstříhání.

3. Označme čísla $x_1, \dots, x_5$ a dále počítejme indexy modulo 5. Definujme (dvě odčítaná čísla jsou buď sousední, nebo je mezi nimi jedno přičítané číslo)

$$\begin{aligned} a_i &= x_i + x_{i+1} - x_{i+2} - x_{i+3} + x_{i+4} \\ b_i &= x_i - x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} - x_{i+4}. \end{aligned}$$

Nyní $a_i + b_i = 2x_i$, tedy

$$x_i^2 - a_i b_i = \left(\frac{a_i + b_i}{2}\right)^2 - a_i b_i = \left(\frac{a_i - b_i}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Takže $x_i^2 \geq a_i b_i$ a protože a_i, b_i jsou dle zadání kladná, můžeme nerovnosti pro všechna i mezi sebou vynásobit a jsme hotovi.

4. Rozmyslete si, že f musí mít pevný bod v $[0,1]$. Je-li s pevný bod funkce f, pak s není pevný bod funkce g. Je-li s pevný bod funkce f, pak také $g(s)$ je pevný bod funkce f. Množina pevných bodů funkce f je uzavřená, tj. má minimum m a maximum M. Pak $g(m) > m = f(m)$ ($g(m)$ je pevný bod f, proto je $g(m) \geq m$, ale $g(m) = m$ nelze) a podobně $g(M) < M = f(M)$. Pak ale z Rolleovy věty exisutje bod $t \in [m, M]$, že $f(t) = g(t)$, což je spor.