

1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 13.10.2025

Úloha 1. Rozhodněte, zda existuje šest různých přirozených čísel a, b, c, d, e, f , která splňují

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f}} = 2025.$$

Úloha 2. Dokažte, že pro každou nekonstantní funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existují reálná čísla x, y taková, že $f(x+y) < f(xy)$.

Úloha 3. Najděte nejmenší číslo S takové, že libovolné dva čtverce se součtem obsahů rovným jedné lze umístit do nějakého obdélníku o obsahu S tak, aby se jejich vnitřky nepřekrývaly a jejich strany byly rovnoběžné se stranami obdélníka.

Úloha 4. Mějme v rovině dvě kružnice ω_1, ω_2 , které se protínají ve dvou různých bodech A, B . Dokažte, že existuje bod X s následující vlastností: pro libovolné body $P \in \omega_1, Q \in \omega_2$ takové, že A leží uvnitř úsečky PQ , prochází osa PQ bodem X .

★ **Úloha 5.** Ukažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b, c existuje přirozené n , pro něž $\sqrt{n^3 + an^2 + bn + c}$ není celé číslo.

★ **Úloha 6.** Nechť $G = (V, E)$ je souvislý (jednoduchý konečný) graf. Pro $x, y \in V$ označme $d_G(x, y)$ délku nejkratší cesty mezi x a y , dále nechť $r_G(x) = \max\{d_G(x, y) \mid y \in V\}$ a $r(G) = \min\{r_G(x) \mid x \in V\}$. Dokažte, že pokud $r(G) \geq 2$, pak G obsahuje cestu délky $2r(G) - 2$ jako indukovaný podgraf.