

5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 4.5.2026

Úloha 1. Kolik existuje permutací p na $\{1, \dots, 2026\}$ takových, že $p(k) + k$ je mocnina dvou pro všechna přípustná k ?

Úloha 2. Nechť A , B , C a D jsou reálné matice 2×2 a uvažujme matice 4×4

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Y = \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{pmatrix}.$$

Dokažte nebo vyvráťte: Je-li X regulární, pak je Y také regulární.

Úloha 3. Město je reprezentováno jako nekonečná rovina, která je rozdělena přímkami na čtverce. Přímký jsou ulice a čtverce jsou bloky. Na jedné z ulic stojí policista na každé sté křižovatce a někde ve městě se nachází bandita, jeho poloha je neznámá. Policisté i bandita se mohou pohybovat pouze po ulicích, policisté rychlostí 1, rychlost bandity je neznámá. Cílem policie je banditu spatřit. Existuje algoritmus, který policii umožní dosáhnout cíle?

Úloha 4. Dokažte

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{F_{k-1}F_{k+2}} \leq \sqrt{F_{n+1}F_{n+4}} - \sqrt{5}.$$

Úloha 5. Nechť $\varepsilon > 0$ a $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ je diferencovatelná funkce taková, že $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/\varepsilon} f(x) = +\infty$. Dokažte

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f'(x)}{f(x)^{1+\varepsilon}} \right| = 0$$

Úloha 6. Najděte všechna kladná celá čísla n taková, že n i n^2 jsou palindromy při zápisu ve dvojkové soustavě (čísla nezačínají nulou).

5th home series

Solutions will be presented at the seminar on May 4, 2026.

Problem 1. How many permutations p on $\{1, \dots, 2026\}$ exist such that $p(k) + k$ is a power of two for all admissible k ?

Problem 2. Let A , B , C and D be real 2×2 matrices and consider 4×4 matrices

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Y = \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{pmatrix}.$$

Prove or disprove: If X is regular, then Y is regular as well.

Problem 3. A town is represented as an infinite plane divided by straight lines into squares. The lines are streets and the squares are blocks. On one of the streets, there is a policeman standing at every hundredth intersection, and somewhere in the town there is a bandit whose position is unknown. Both the policemen and the bandit can move only along the streets; the policemen move at speed 1, while the bandit's speed is unknown. The aim of the police is to see the bandit. Does an algorithm exist that allows the police to achieve their goal?

Problem 4. Prove

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{F_{k-1}F_{k+2}} \leq \sqrt{F_{n+1}F_{n+4}} - \sqrt{5}.$$

Problem 5. Let $\varepsilon > 0$ and $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ be differentiable such that $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/\varepsilon} f(x) = +\infty$. Prove

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f'(x)}{f(x)^{1+\varepsilon}} \right| = 0.$$

Problem 6. Find all positive integers n such that both n and n^2 are palindromes when written in binary (with no leading zeros).