

7. soutěžní série

19. 5. 2025

Úloha 1 (E). Vypočtěte stou derivaci funkce

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x}.$$

(5 bodů)

Úloha 2 (E,EM?). Pro pevné kladné celé číslo k definujme $a_0 = a_1 = 1$ a $a_n = a_{n-1} + (k - n)^2 a_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Ukažte, že $a_k = (k - 1)!$.

(10 bodů)

Úloha 3 (EM,M). Buď V konečná množina vektorů v $\mathbb{R}^2$, pro níž $\sum_{v \in V} |v| = \pi$. Dokažte, že existuje $U \subset V$ taková, že $|\sum_{v \in U} v| \geq 1$.

(10 bodů)

Úloha 4 (MH/H). Buď $s_1, s_2, s_3, \dots$ nekonečná nekonstantní posloupnost racionálních čísel, tj. není pravda, že $s_1 = s_2 = s_3 = \dots$. Předpokládejme, že $t_1, t_2, t_3, \dots$ je také nekonečná nekonstantní posloupnost racionálních čísel a nechť $(s_i - s_j)(t_i - t_j)$ je celé číslo pro všechna i a j . Dokažte, že existuje takové racionální číslo r , že $(s_i - s_j)r$ a $(t_i - t_j)/r$ jsou celá čísla pro všechna i a j .

(15 bodů)

7th contest series

May 19, 2025

Problem 1 (E). Calculate the 100th derivative of the function

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x}.$$

(5 points)

Problem 2 (E,EM?). For a fixed positive integer k , let $a_0 = a_1 = 1$ and $a_n = a_{n-1} + (k - n)^2 a_{n-2}$ for $n \geq 2$. Show that $a_k = (k - 1)!$.

(10 points)

Problem 3 (EM,M). Let V be a finite set of vectors in $\mathbb{R}^2$ such that $\sum_{v \in V} |v| = \pi$. Prove that there exists a subset U of V such that $|\sum_{v \in U} v| \geq 1$.

(10 points)

Problem 4 (MH/H). Let $s_1, s_2, s_3, \dots$ be an infinite, nonconstant sequence of rational numbers, meaning it is not the case that $s_1 = s_2 = s_3 = \dots$. Suppose that $t_1, t_2, t_3, \dots$ is also an infinite, nonconstant sequence of rational numbers with the property that $(s_i - s_j)(t_i - t_j)$ is an integer for all i and j . Prove that there exists a rational number r such that $(s_i - s_j)r$ and $(t_i - t_j)/r$ are integers for all i and j .

(15 points)