

7. soutěžní série – řešení

1. Rozložíme na praciální zlomky

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1},$$

pak snadno zderivujeme na

$$100! \left(-\frac{1}{x^{101}} + \frac{1}{(x+1)^{101}} + \frac{1}{(x-1)^{101}} \right).$$

2. Definujme $b_n = a_n + (k - n - 1)a_{n-1}$. Pak $b_{k-1} = a_{k-1} = a_k$, stačí tedy dokázat, že $b_{k-1} = (k-1)!$. To ale ihned plyne z $b_1 = (k-1)$ a rekurence $b_n = (k-n)b_{n-1}$, kterou ověříme:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n - a_{n-1} + (k-n)a_{n-1} = (k-n)^2 a_{n-2} + (k-n)a_{n-1} \\ &= (k-n)(a_{n-1} + (k-(n-1)-1)a_{n-2}) = (k-n)b_{n-1}. \end{aligned}$$

3. První řešení využívá (známou?) nerovnost $p < \pi d$, která platí pro obvod p a průměr d konvexního mnohoúhelníku. Nechť je vektorů k . Přidáme vektor w , aby $w + \sum v = 0$. Pak vektory seřadíme tak, aby částečné součty $S_n = \sum_{i=1}^n v_i$ tvořily konvexní mnohoúhelník (tj. vzestupně podle orientované odchylky od směru $(1, 0)$). Pak máme

$$\pi d > p = \sum |v| + |w| \geq \sum |v| = \pi,$$

tj. $d > 1$, kde d je vzdálenost dvou vrcholů, tedy $1 < d = |\sum_i^m v_i|$.

Druhé řešení používá pravděpodobnostní metodu. Pro náhodný jednotkový vektor h položíme $v_h = v \cdot h$, pokud $v \cdot h \geq 0$ a $v_h = 0$, pokud $v \cdot h < 0$. Pak očekávaná hodnota $E v_h = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |v| \cos \theta d\theta = \frac{|v|}{\pi}$. Pak $E \sum v_h = \sum E v_h = 1$. Tedy existuje jednotkový vektor h , že $\sum v_h \geq 1$. Položíme $U = \{v \in V : v \cdot h > 0\}$, pak $1 \leq \sum_{v \in U} v_h = h \cdot \sum_{v \in U} v \leq |\sum_{v \in U} v|$.

4. Nejdřív si něco nabůnujeme: Posuneme všechna s_i o $-s_1$, takže bude platit $s_1 = 0$. Podobně $t_1 = 0$. Pak vydělíme všechna s_i racionálním číslem s_2 , aby bylo $s_2 = 1$. Naopak všechna t_i jím vynásobíme. Tohle násobení a dělení můžeme udělat, nakonec se zahrne do r .

Máme $(s_i - s_1)(t_i - t_1) = s_i t_i \in \mathbb{Z}$. Speciálně platí také $s_2 t_2 = t_2 \in \mathbb{Z}$. Sugestivně označme $n = t_2$. Dále má platit $(s_i - s_2)(t_i - t_2) = (s_i - 1)(t_i - n) = s_i t_i + n - (t_i + n s_i) \in \mathbb{Z}$, tedy $t_i + n s_i \in \mathbb{Z}$. Dokonce ukážeme $t_i \in \mathbb{Z}, n s_i \in \mathbb{Z}$. Kdyby nebylo $n s_i$ celé, mělo by $(n s_i \text{ i samo } s_i)$ jmenovatel dělitelný nějakým prvočíslem. Pak by i t_i muselo mít jmenovatel dělitelný tímž prvočíslem, ale $s_i t_i \in \mathbb{Z}$ a to je spor.

Tak dostáváme, že po vhodném nabůnování jsou všechna t_i celá čísla (jinými slovy mají omezené jmenovatele), čímž je zásadní část důkazu hotová. Vydělíme všechna t_i jejich největším společným dělitelem, aby byla nesoudělná, a všechna s_i jím vynásobíme. Pak sporem ukážeme, že jsou všechna s_i celá (ve zkratce: podíváme se na p -valuaci $(s_i - s_j)(t_i - t_j)$).

Kdyby nějaké prvočíslo p dělilo jmenovatel s_i , dělilo by také t_i . Z nesoudělnosti existuje t_j nedělitelné p . Číslo s_j pak nemůže mít jmenovatel dělitelný p a z toho plyne, že $s_i - s_j$ má jmenovatel dělitelný p . Jenže $t_i - t_j$ není dělitelné p a $(s_i - s_j)(t_i - t_j)$ má být celé, což je spor.

