

6. soutěžní série

5. 5. 2025

Úloha 1. Existuje nekonečná posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ taková, že pro každé kladné celé číslo m platí

$$a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots = m ?$$

(5 bodů)

Úloha 2. Třikrát diferencovatelná funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ má aspoň 5 různých kořenů. Dokažte, že $f + 6f' + 12f'' + 8f'''$ má aspoň dva navzájem různé kořeny.

(10 bodů)

Úloha 3. Je dána krychle s hranou délky 4. Je možné pokrýt tři její stěny, které sdílejí vrchol, šestnácti papírovými obdélníky 3×1 ? Obdélníky se smějí přehýbat, ale ne stříhat.

(10 bodů)

Úloha 4. Buď V nekonečně-rozměrný vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Najděte všechna přirozená n , pro něž platí: pokud jsou $P_1, P_2, \dots, P_n$ lineární projekce na V splňující $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 0$, pak $P_i = 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.

(15 bodů)

6th contest series

May 5, 2025

Problem 1. Is there an infinite sequence of real numbers $a_1, a_2, a_3, \dots$ such that

$$a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots = m$$

for every positive integer m ? (5 points)

Problem 2. A three times differentiable function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ has at least five distinct zeros. Prove that $f + 6f' + 12f'' + 8f'''$ has at least two distinct zeros. (10 points)

Problem 3. A cube with edge length 4 is given. Is it possible to cover three faces of the cube that share a vertex with 16 paper rectangles of the size 3×1 ? The rectangles can be folded, but not cut. (10 points)

Problem 4. Let V be an infinite-dimensional vector space over $\mathbb{C}$. Find all positive integers n such that: if $P_1, P_2, \dots, P_n$ are linear projections on V satisfying $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 0$, then $P_i = 0$ for all $i = 1, \dots, n$. (15 points)