

6. soutěžní série – řešení

1. Ne. Cauchy-Schwarz na vektory $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ a $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots)$ zní

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots)(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \dots) \geq a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots$$

Ale levá strana by měla být rovna $2 \cdot 4 = 8$ a pravá 9.

2. Ve výrazu $f + 6f' + 12f'' + 8f'''$ vidíme vzorec pro třetí derivaci součinu, všimneme si, že $(e^{x/2}f(x))''' = \frac{1}{8}e^{x/2}(f + 6f' + 12f'' + 8f''')$. Má-li f aspoň různých 5 kořenů, pak totéž platí i pro $g(x) = e^{x/2}f(x)$. Pak opakovaným použitím Rolleovy věty g' má aspoň 4 kořeny, g'' aspoň 3 a g''' aspoň 2, což je to, co jsme potřebovali.

3. Ne. Dohromady mají obdélníky přesně obsah těch stěn, takže by k sobě a k okrajům musely dokonale přiléhat, takže by musely být v tabulce. Uděláme tedy z každé stěny tabulku 4×4 . Dále uvážíme tři hrany vedoucí ze společného vrcholu a začerníme všech 21 políček, které jsou od nějaké z tří hran vzdálené o jedno políčko (tj. ne přilehlá políčka, ale o 1 dál). Potom pokryje každý obdélník sudý počet nezačerněných políček, kterých je ale lichý počet.

4. Tvrzení platí právě když $n \leq 3$. Stačí implikaci dokázat pro 3 projekce a najít protipříklad pro 4 projekce.

Pro 3 projekce A, B, C , $A + B + C = 0$ vezmeme $u \in \text{Im } A$, tedy $Au = u$. Označme $v = Bu$, tj. $Bv = v$. Dále $Cu = -Au - Bu = -u - v$, tj. $u + v \in \text{Im } C$, a tedy $C(u + v) = u + v$, odtud $Cv = 2(u + v)$ a dále $Av = -Bv - Cv = -2u - 3v$. Protože $A^2 = A$, máme $-2u - 3v = -2Au - 3Av = -2u + 6u + 9v$. Tedy $u = -2v$, takže $Bu = -u/2$. Protože B je projekce, nutně $u = 0$. Protože u byl libovolný prvek z $\text{Im } A$, je $A = 0$ a podobně pro B a C .

Pro 4 projekce máme tento protipříklad:

$$\begin{aligned} P_1(x_1, x_2, \dots) &= (x_1, -2(x_2 + x_3), 3(x_2 + x_3), -4(x_4 + x_5), 5(x_4 + x_5), \dots) \\ P_2(x_1, x_2, \dots) &= (x_1, -2(x_2 - x_3), -3(x_2 - x_3), -4(x_4 - x_5), -5(x_4 - x_5), \dots) \\ P_3(x_1, x_2, \dots) &= (-1(x_1 + x_2), 2(x_1 + x_2), -3(x_3 + x_4), 4(x_3 + x_4), -5(x_5 + x_6), \dots) \\ P_4(x_1, x_2, \dots) &= (-1(x_1 - x_2), -2(x_1 - x_2), -3(x_3 - x_4), -4(x_3 - x_4), -5(x_5 - x_6), \dots). \end{aligned}$$

