

## 6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 18.5.2026

**Úloha 1.** Která čísla z posloupnosti 101, 10101, 1010101, ... jsou prvočísla?

**Úloha 2.** Kolik násobení potřebujeme, počítáme-li determinant matice induktivně rozvojem podle sloupce? Výsledek vyjádřete jako uzavřenou formuli, tj. bez použití sumy (ale můžete použít celou část).

**Úloha 3.** Nechť  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  je spojitá funkce. Položme  $t_n = n \sqrt[n]{n}$ . Určete

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$

**Úloha 4.** Ukažte, že pro daná kladná celá čísla  $n, r$  existuje  $r$  jednoznačně určených celých čísel  $a_1 > a_2 > \dots > a_r \geq 0$  takových, že

$$n = \binom{a_1}{r} + \binom{a_2}{r-1} + \dots + \binom{a_r}{1}.$$

**Úloha 5.** Mějme body  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  ležící na sféře  $S$  v  $\mathbb{R}^n$ . Označme  $G$  těžiště bodů  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  a označme  $B_i$  průsečík polopřímky  $A_i G$  s  $S$  pro  $i = 1, \dots, n+1$ . Dokažte

$$\sum_{i=1}^{n+1} |A_i G| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |B_i G|$$

**Úloha 6.** V konečném okruhu  $R$  platí následující vlastnost: pro libovolné prvky  $a, b \in R$  existuje  $c \in R$  takový, že  $a^2 + b^2 = c^2$ . Ukažte, že pro libovolné  $a, b, c \in R$  existuje  $d \in R$  takový, že  $2abc = d^2$ . (Výrazem  $2abc$  myslíme  $abc + abc$ . Okruh  $R$  nemusí obsahovat jednotku a násobení nemusí být komutativní.)

# 6th home series

Solutions will be presented at the seminar on May 18, 2026.

**Problem 1.** Which numbers in the sequence 101, 10101, 1010101, ... are prime numbers?

**Problem 2.** How many multiplications are needed if we calculate the determinant of a matrix inductively using cofactor expansion along a column? Express the result as a closed-form formula, i.e., without using a sum (but you may use the floor or ceiling function).

**Problem 3.** Let  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  be a continuous function. Let  $t_n = n \sqrt[n]{n}$ . Determine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$

**Problem 4.** Show that for given positive integers  $n, r$ , there exist  $r$  uniquely determined integers  $a_1 > a_2 > \dots > a_r \geq 0$  such that

$$n = \binom{a_1}{r} + \binom{a_2}{r-1} + \dots + \binom{a_r}{1}.$$

**Problem 5.** Let  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  be points lying on a sphere  $S$  in  $\mathbb{R}^n$ . Let  $G$  be the centroid of the points  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  and let  $B_i$  be the intersection of the ray  $A_iG$  with  $S$  for  $i = 1, \dots, n+1$ . Prove that

$$\sum_{i=1}^{n+1} |A_iG| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |B_iG|$$

**Problem 6.** In a finite ring  $R$ , the following property holds: for any elements  $a, b \in R$ , there exists  $c \in R$  such that  $a^2 + b^2 = c^2$ . Show that for any  $a, b, c \in R$ , there exists  $d \in R$  such that  $2abc = d^2$ . (By the expression  $2abc$ , we mean  $abc + abc$ . The ring  $R$  does not have to contain a unity and multiplication does not have to be commutative.)