5. soutěžní série

14. 4. 2025

Úloha 1. Najděte všechny trojice nezáporných reálných čísel a, b, c, pro něž $\sqrt{a-b+c} = \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}$. (5 bodů)

Úloha 2. Existuje permutace $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných celých čísel, pro kterou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ konverguje? (10 bodů)

Úloha 3. Jednička a Nula hrají maticové piškvorky. Mají prázdnou matici $n \times n$, $n \geq 4$ a střídavě Jednička napíše na volné pole 1 a Nula napíše na volné pole 0, přičemž Jednička začíná. Hraje se, dokud není matice plná. Nula vyhraje, pokud je determinant výsledné matice nulový, jinak vyhraje Jednička. Kdo má v závislosti na n vyhrávající strategii? (10 bodů)

Úloha 4. Rozhodněte, zda pro každé kladné celé n a každou množinu $A \subset \{1, ..., n\}$ existuje takové kladné celé číslo a_0, aby rekurentně zadaná posloupnost $a_i = 1^2 + 2^2 + \cdots + a_{i-1}^2$, $i \geq 1$ splňovala pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$

$$6 \mid a_i \quad \Leftrightarrow \quad i \in A.$$

(15 bodů)

5th contest series

April 14, 2025

Problem 1. Find all triples of non-negative real numbers a, b, c, such that $\sqrt{a-b+c} = \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}$. (5 points)

Problem 2. Does there exist a permutation $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ of positive integers such that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ converges? (10 points)

Problem 3. One and Zero are playing matrix tic-tac-toe. They have an empty matrix $n \times n$, $n \geq 4$ and alternately One writes 1 on an empty cell and Zero writes 0 on an empty cell, with One starting. The game is played until the matrix is full. Zero wins if determinant of the resulting matrix is zero, otherwise One wins. Who has the winning strategy depending on n? (10 points)

Problem 4. Decide whether for every positive integer n and every set $A \subset \{1, ..., n\}$ there exists a positive integer a_0 such that the recursively defined sequence $a_i = 1^2 + 2^2 + \cdots + a_{i-1}^2$, $i \geq 1$ satisfies for every $i = 1, 2, \ldots, n$

$$6 \mid a_i \quad \Leftrightarrow \quad i \in A.$$

(15 points)