

5. soutěžní série – řešení

1. Upravíme na $\sqrt{a-b+c} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{c}$, v tomto tvaru umocníme na druhou. Všechno kromě odmocnin se odečte a zbyde $2\sqrt{(a-b+c)b} = 2\sqrt{ac}$, umocníme zase a upravíme na $4(a-b)(b-c) = 0$. Řešeními jsou tedy právě ty trojice nezáporných reálných čísel, kde $a = b$ nebo $b = c$, ty zjevně vyhovují.

2. Neexistuje. Odhad

$$\sum_{n=2^{k+1}+1}^{2^{k+2}} \frac{a_n}{n^2} \geq 2^k \frac{2^k}{2^{2k+4}} = \frac{1}{16}$$

plyne z toho, že mezi 2^{k+1} navzájem různými celými kladnými čísly a_n jich bude aspoň 2^k větších než 2^k a jmenovatele odhademe největším z použitých jmenovatelů. Sečtením nerovností přes všechna k dostaneme divergenci řady.

3. Vyhraje Nula. Zvolí si dvě dvojice sloupců. Kdykoliv zahraje Jednička do jednoho z dvojice sloupců, zahraje Nula na příslušné místo druhého z dvojice (ve stejném řádku). Tak když se tyto dva sloupce zaplní, budou se sčítat na vektor samých jedniček a když se dvě dvojice sloupců sčítají na tentýž vektor, je matice singulární.

Když zahraje Jednička naopak mimo ty čtyři sloupce, chce Nula zahrát taky mimo. Může se ale jednou stát, že mimo už není místo (pro liché n). Tehdy zahraje do jednoho z těch sloupců a pokračuje svou strategií zrcadlení Jedničky, akorát s jednou nulou v matici navíc. Ta nula nevadí: když Jednička zahraje na příslušné místo spárovaného sloupce (takže Nula nemůže hrát svojí strategií, protože tam má zaplněno tou nulou navíc), zahraje Nula někam jinam zase nulu navíc, a tak tam pořád bude zůstat nula navíc, až posledním tahem Jednička musí zahrát vedle té nuly navíc. Dvojice sloupců se i potom budou sčítat správně na vektor samých jedniček.

4. Ano. Ukážeme obecnější tvrzení: pro libovolná $b_1, \dots, b_n \in \{0, \dots, 5\}$ existuje a_0 , že $a_i \equiv b_i \pmod{6}$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$. Zkonstruuje a_i postupně. Platí $a_i = \frac{1}{6}a_{i-1}(a_{i-1} + 1)(2a_{i-1} + 1)$. Všimněme si, že pokud a_{i-1} zvětšíme o 6^k , pak se a_i zvětší o

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}(a_{i-1} + 6^k)(a_{i-1} + 6^k + 1)(2\tilde{a}_{i-1} + 2 \cdot 6^k + 1) - \frac{1}{6}a_{i-1}(a_{i-1} + 1)(2a_{i-1} + 1) \\ &= 2 \cdot 6^{3k-1} + 6^{2k-1}(2a_{i-1} + 2(a_{i-1} + 1) + 2a_{i-1} + 1) \\ & \quad + 6^{k-1}((a_{i-1} + 1)(2a_{i-1} + 1) + a_{i-1}(2a_{i-1} + 1) + 2a_{i-1}(a_{i-1} + 1)), \end{aligned}$$

což modulo 6^k dává $6^{k-1}(6a_{i-1}^2 + 6a_{i-1} + 1) \equiv 6^{k-1}$. Speciálně, pokud $a_0 = 1$ dává $a_1 \equiv b \pmod{6}$, pak $a_0 + 6(b_1 - b)$ dává $a_1 \equiv b + (b_1 - b) = b_1 \pmod{6}$. Máme-li nyní a_0 takové, že $a_i \equiv b_i \pmod{6}$ pro $i = 1, \dots, k-1$ a $a_k \equiv b \not\equiv b_k \pmod{6}$, vezměme $\tilde{a}_0 = a_0 + 6^k(b_k - b)$. Pak $\tilde{a}_1 \equiv a_1 + 6^{k-1}(b_k - b) \pmod{6^k}$ a dále induktivně $\tilde{a}_2 \equiv a_2 + 6^{k-2}(b_k - b) \pmod{6^{k-1}}$, $\dots$, $\tilde{a}_k \equiv a_k + 6^{k-k}(b_k - b) \pmod{6}$. Tedy, modulo 6 platí $\tilde{a}_i \equiv a_i$ pro $i = 1, \dots, k-1$ a $\tilde{a}_k \equiv a_k + (b_k - b) \equiv b_k$. Pokud je $b_k - b$ záporné, lze ho zvětšit o násobek šesti.

