4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 20. 4. 2026

Úloha 1. Předposlední číslice 3^n je sudá. Dokažte.

Úloha 2. Ukažte, že v každém souvislém grafu se sudým počtem hran lze orientovat hrany tak, aby z každého vrcholu vycházel sudý počet hran.

Úloha 3. Nechť A je komplexní matice typu $n \times n$ splňující $A^3 = 2I$. Dokažte, že $B = A^2 - 2A + 2I$ je regulární.

Úloha 4. Nechť funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, kde $b \geq a + 2$, je dvakrát diferencovatelná, $|f(x)| \leq 1$ a $|f''(x)| \leq 1$ pro všechna $x \in [a, b]$. Ukažte, že $|f'(x)| \leq 2$.

Úloha 5. V prostoru jsou dány tři body tvořící ostroúhlý trojúhelník. Ukažte, že lze najít další dva body tak, že žádné tři z pětice bodů neleží na jedné přímce a každá přímka procházející dvěma z nich je kolmá na rovinu obsahující zbylé tři.

⋆ **Úloha 6.** Pokud $a, b \in \mathbb{R}$, pak jako $[a, b]$ budeme označovat uzavřený interval mezi a a b, nezávisle na tom, které z nich je větší. Pro $n \in \mathbb{N}$ a dvojici funkcí $f, g : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ definujeme *vzdálenost* f a g jako velikost množiny

$$\bigcup_{i=1}^{n} [f(i), g(i)].$$

Ukažte, že pro každé $\alpha \in (0, 1)$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a 2026^n funkcí $f_i : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ takových, že vzdálenost f_i a f_j je alespoň αn pro každé $i \neq j$.

4th home series

Solutions will be presented at the seminar on April 20, 2026.

Problem 1. The second-to-last digit of 3^n is even. Prove it.

Problem 2. Show that in every connected graph with an even number of edges, one can orient the edges so that an even number of edges leaves each vertex.

Problem 3. Let A be a complex $n \times n$ matrix satisfying $A^3 = 2I$. Prove that $B = A^2 - 2A + 2I$ is regular.

Problem 4. Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, where $b \geq a+2$, be twice differentiable, with $|f(x)| \leq 1$ and $|f''(x)| \leq 1$ for all $x \in [a, b]$. Show that $|f'(x)| \leq 2$.

Problem 5. In space, three points forming an acute triangle are given. Show that it is possible to find two additional points such that no three of the five points are collinear and every line passing through two of them is perpendicular to the plane containing the other three.

⋆ **Problem 6.** If $a, b \in \mathbb{R}$, then by $[a, b]$ we denote the closed interval between a and b, regardless of which is larger. For $n \in \mathbb{N}$ and a pair of functions $f, g : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, define the *distance* between f and g as the size of the set

$$\bigcup_{i=1}^{n} [f(i), g(i)].$$

Show that for every $\alpha \in (0, 1)$ there exists $n \in \mathbb{N}$ and 2026^n functions $f_i : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ such that the distance between f_i and f_j is at least αn for every $i \neq j$.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`