3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 30.3.2026

Úloha 1. Nechť k je kladné celé číslo a nechť a je celé číslo takové, že $a-2$ je násobkem 7 a a^6-1 je násobkem 7^k. Dokažte, že $(a+1)^6-1$ je rovněž násobkem 7^k.

Úloha 2. Na stole leží 10 čtyřstěnů. Pro každé tři z nich existuje rovina rovnoběžná se stolem taková, že jejich řezy touto rovinou mají stejný obsah. Dokažte, že pak už taková rovina existuje pro všech 10.

Úloha 3. Na nekonečné rovině hrají dva hráči hru. Jeden má figurku „vlka“ a druhý má N figurek „ovcí“. První hráč pohne vlkem, poté pohne druhý hráč nějakou ovcí, první hráč znovu pohne vlkem, druhý hráč pohne nějakou ovcí a tak dále. Vlk a ovce se mohou pohybovat libovolným směrem, ovšem maximální vzdálenost tahu je jeden metr. Pro která N existuje počáteční pozice figurek, ze které nemůže vlk chytit žádnou ovci?

Úloha 4. Najděte všechny funkce g z celočíselné mřížky $\mathbb{Z}^2$ do reálných čísel, které splňují $g(u+v)=g(u)+g(v)$ pro každé dva kolmé vektory u, $v \in \mathbb{Z}^2$.

Úloha 5. Rozhodněte, zda diferencovatelná funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, která pro všechna $x\in\mathbb{R}$ splňuje $f'(x)=f(x+1)-f(x)$, musí být tvaru $f(x)=ax+b$.

Úloha 6. Jsou dána celá čísla a, n větší než 1. Najděte všechny polynomy $P(x)$ s celočíselnými koeficienty takové, že existuje jen konečně mnoho prvočísel p, která dělí $P(a^{n^k})$ pro nějaké kladné celé číslo k.

3rd home series

Solutions will be presented at the seminar on March 30, 2026.

Problem 1. Let k be a positive integer and let a be an integer such that $a-2$ is multiple of 7 and a^6-1 is a multiple of 7^k. Prove that $(a+1)^6-1$ is also a multiple of 7^k.

Problem 2. There are 10 tetrahedra on the table. For any three of them, there exists a plane parallel to the table such that the cross-sections of the three tetrahedra through that plane have the same area. Prove that such a plane exists for all 10.

Problem 3. A game is played on an infinite plane. There are two players. One has a piece known as a “wolf”, while the other has N pieces known as “sheep”. The first player moves the wolf, then the second player moves a sheep, the first player moves the wolf again, the second player moves a sheep, and so on. The wolf and the sheep can move in any direction, with a maximum distance of one meter per move. For which N there exists an initial position of the pieces from which the wolf can not capture any sheep?

Problem 4. Determine all real valued functions g on the integer lattice $\mathbb{Z}^2$ such that $g(u+v)=g(u)+g(v)$ for every pair of orthogonal vectors u, $v \in \mathbb{Z}^2$.

Problem 5. Determine whether any differentiable function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ that satisfies $f'(x)=f(x+1)-f(x)$ for all $x\in\mathbb{R}$ must be of the form $f(x)=ax+b$.

Problem 6. Let a and n be integers greater than 1. For which polynomials $P(x)$ with integer coefficients are there only finitely many primes p such that p divides $P(a^{n^k})$ for some positive integer k?
