

## 2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 16.3.2026

**Úloha 1.** Buď  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dvakrát diferencovatelná a necht'  $f''(x) \geq 0$  pro všechna  $x$ . Dokažte, že  $f(x + f'(x)) \geq f(x)$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .

**Úloha 2.** Necht'  $S$  je nejmenší množina kladných celých čísel taková, že a) 2 patří do  $S$ , b)  $n$  patří do  $S$ , kdykoli  $n^2$  patří do  $S$ , a c)  $(n + 5)^2$  patří do  $S$ , kdykoli  $n$  patří do  $S$ . Která kladná celá čísla nepatří do  $S$ ?

**Úloha 3.** Dá se z kvádrů  $3 \times 3 \times 1$  sestavit kvádr rozměrů  $7 \times 9 \times 11$ ?

**Úloha 4.** Buď  $A$  čtvercová matice s celočíselnými prvky a  $I$  jednotková matice stejného řádu. Dokažte, že  $\det(A^4 + I) \neq 13$ .

**Úloha 5.** Pan Ovál má doma stůl tvaru elipsy, jejíž osy mají délky 100 a 180 centimetrů. Na eliptické stoly se však bohužel neprodávají ubrusy, takže si musí koupit ubrus obdélníkový. Které z následujících rozměrů (v centimetrech) může zvolit, aby mu ubrus pokryl celý stůl?

(a)  $120 \times 170$     (b)  $130 \times 160$     (c)  $140 \times 150$

**Úloha 6.** Najděte celé číslo, jehož druhá odmocnina obsahuje bezprostředně za desetinnou čárkou číslice 414213462.

## 2nd home series

Solutions will be presented at the seminar on March 24, 2025.

**Problem 1.** Let  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be twice differentiable and suppose that  $f''(x) \geq 0$  for all  $x$ . Prove that  $f(x + f'(x)) \geq f(x)$  for all  $x \in \mathbb{R}$ .

**Problem 2.** Let  $S$  be the smallest set of positive integers such that a) 2 is in  $S$ , b)  $n$  is in  $S$  whenever  $n^2$  is in  $S$ , and c)  $(n + 5)^2$  is in  $S$  whenever  $n$  is in  $S$ . Which positive integers are not in  $S$ ?

**Problem 3.** Can a rectangular box of dimensions  $7 \times 9 \times 11$  be assembled from blocks of dimensions  $3 \times 3 \times 1$ ?

**Problem 4.** Let  $A$  be a square matrix with integer entries and  $I$  the identity matrix of the same size. Prove that  $\det(A^4 + I) \neq 13$ .

**Problem 5.** Mr. Oval has at home a table in the shape of an ellipse whose axes have lengths 100 and 180 centimeters. Unfortunately, tablecloths for elliptical tables are not sold, so he must buy a rectangular one. Which of the following dimensions (in centimeters) can he choose so that the tablecloth covers the entire table?

- (a)  $120 \times 170$     (b)  $130 \times 160$     (c)  $140 \times 150$

**Problem 6.** Find an integer whose square root contains the digits 414213462 immediately after the decimal point.