

1. soutěžní série

23. 2. 2026

Úloha 1. Pro čtyřmístné číslo $N = \overline{abcd}$ označme $p(N) = \overline{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$ nejmenší přirozené číslo, pro něž je číslo $\overline{ab\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_kcd}$ dělitelné N . Určete $p(2025)$. (5 bodů)

Úloha 2. Mějme šestiúhelník $ABCDEF$, kterému lze opsat kružnici o poloměru 1 a pro který platí $|AB| = |CD| = |EF| = 1$. Nechť K, L, M jsou středy stran BC, DE a FA . Ukažte, že trojúhelník KLM je rovnostranný. (10 bodů)

Úloha 3. Pro libovolné reálné $n \times n$ matice X, Y dokažte

$$|h(XY) - h(YX)| \leq \frac{n}{2}.$$

(Zde $h(\cdot)$ označuje hodnotu matice.) (10 bodů)

Úloha 4. Dokažte, že pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. $\liminf_{n \rightarrow \infty} na_n > 0$,
2. splňuje-li nerostoucí posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ nerovnost $b_k \geq a_k$ pro nekonečně mnoho k , pak $\sum b_k = \infty$.

(15 bodů)

1st contest series

February 24, 2025

Problem 1. For a four-digit number $N = \overline{abcd}$, let us denote by $p(N) = \overline{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k}$ the smallest positive integer such that the number $\overline{ab\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k cd}$ is divisible by N . Determine $p(2025)$. (5 points)

Problem 2. Let $ABCDEF$ be a hexagon that can be inscribed in a circle of radius 1 and for which $|AB| = |CD| = |EF| = 1$. Let K, L, M be the midpoints of the sides BC, DE , and FA , respectively. Show that triangle KLM is equilateral. (10 points)

Problem 3. For any real $n \times n$ matrices X, Y , prove that

$$|r(XY) - r(YX)| \leq \frac{n}{2}.$$

(Here $r(\cdot)$ denotes the rank of a matrix.) (10 points)

Problem 4. Prove that for a sequence $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ of positive numbers the following statements are equivalent:

1. $\liminf_{n \rightarrow \infty} na_n > 0$,
2. if a nonincreasing sequence $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfies $b_k \geq a_k$ for infinitely many k , then $\sum b_k = \infty$.

(15 points)