1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 2.3.2026

Úloha 1. Nechť $M = \{-1, -2, \dots, -2026\}$. Pro každou N neprázdnou podmnožinu M definujme $P(N)$ jako součin všech prvků z N. Jaký je součet $P(N)$ přes všechny možné neprázdné podmnožiny M?

Úloha 2. Množinu $A \subset \mathbb{R}$ nazveme *rozumnou*, pokud je omezená a pro libovolná (ne nutně různá) $a, b \in A$ je $(a-b)^2 \in A$. Reálné číslo r nazveme *chytré*, pokud existuje rozumná množina A taková, že $r \in A$. Nalezněte infimum množiny chytrých čísel.

Úloha 3. Nechť M je libovolná množina a operace $\circ : M \times M \to M$ splňuje pro všechna $w, x, y, z \in M$ rovnost $(w \circ x) \circ (y \circ z) = w \circ z$. Dokažte, že $(a \circ b) \circ c = a \circ c$ pro všechna $a, b, c \in M$.

Úloha 4. Uvažujme posloupnost mnohoúhelníků P_n takovou, že P_0 je rovnostranný trojúhelník se stranou délky 1 a vrcholy P_{n+1} jsou body v jedné a ve dvou třetinách délky každé strany P_n (například P_1 je pravidelný šestiúhelník o straně délky 1/3). Najděte $\lim_{n\to\infty} |P_n|$, kde $|P|$ značí obsah P.

Úloha 5. V každém vrcholu čtvercové mřížky $n \times n$ sedí brouček. Během noci se každý brouček přesunul do středu nějakého ze čtverečků mřížky, a to takovým způsobem, že pokud dva broučci původně sousedili (tj. ve mřížce mezi nimi vedla hrana), tak buď zalezli do středu stejného čtverečku, nebo zalezli do středů dvou čtverečků sousedících hranou. Ukažte, že existuje brouček, který zalezl do středu čtverečku, v jehož vrcholu původně seděl.

Úloha 6. Nechť $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce taková, že pro každé $k = 0, 1, \dots, n-1$ je

$$\int_0^1 x^k f(x) \,\mathrm{d}x = 1.$$

Ukažte, že

$$\int_0^1 f(x)^2 \,\mathrm{d}x \geq n^2.$$

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`

1st home series

Solutions will be presented at the seminar on March 2, 2026.

Problem 1. Let $M = \{-1, -2, \ldots, -2026\}$. For each nonempty subset N of M, define $P(N)$ as the product of all elements of N. What is the sum of $P(N)$ over all possible nonempty subsets of M?

Problem 2. A set $A \subset \mathbb{R}$ is called *reasonable* if it is bounded and for any (not necessarily distinct) $a, b \in A$ we have $(a-b)^2 \in A$. A real number r is called *clever* if there exists a reasonable set A such that $r \in A$. Find the infimum of the set of clever numbers.

Problem 3. Let M be an arbitrary set and let the operation $\circ : M \times M \to M$ satisfy for all $w, x, y, z \in M$ the equality $(w \circ x) \circ (y \circ z) = w \circ z$. Prove that $(a \circ b) \circ c = a \circ c$ for all $a, b, c \in M$.

Problem 4. Consider a sequence of polygons P_n such that P_0 is an equilateral triangle with side length 1, and the vertices of P_{n+1} are the points at one third and two thirds of the length of each side of P_n (for example, P_1 is a regular hexagon with side length $1/3$). Find $\lim_{n\to\infty} |P_n|$, where $|P|$ denotes the area of P.

Problem 5. At each vertex of an $n \times n$ square grid sits a bug. During the night, each bug moved to the center of one of the squares of the grid, in such a way that if two bugs were originally adjacent (i.e., connected by an edge of the grid), then they either moved to the center of the same square or to the centers of two squares sharing a common edge. Show that there exists a bug that moved to the center of a square whose vertex it originally occupied.

Problem 6. Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that for each $k = 0, 1, \ldots, n-1$ we have

$$\int_0^1 x^k f(x)\, dx = 1.$$

Show that

$$\int_0^1 f(x)^2\, dx \geq n^2.$$

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`