SUPERNÁHODA A JEJÍ PROJEVY V DYNAMICE PROUDĚNÍ VOZIDEL

prof. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.

Katedra matematiky

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Deterministické vs. stochastické procesy

Deterministický systém:

- systém bez statistických odchylek;
- po zadání všech silových účinků a všech počátečních (či okrajových) podmínek má jednoznačné řešení;

$$m \cdot a = m \cdot \ddot{y} = m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \sum_{k=1}^{N} F_k(y, \dot{y}, t)$$

$$y(0) = \alpha, \qquad \dot{y}(0) = v(0) = \beta$$

- řešením je jednoznačně určená funkce $y = y(t)$;
- Příklad: slabě tlumené kmitání

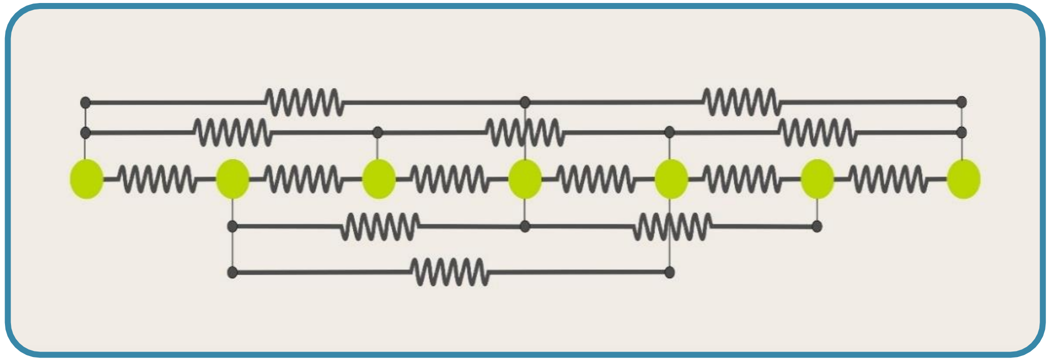
$$m \cdot \ddot{y} = -k \cdot y - \lambda \cdot \dot{y}$$

$$y = y(t) = A\,\mathrm{e}^{-\mu t} \cos(\omega t + \varepsilon)$$

Deterministické vs. stochastické procesy

Stochastický systém:

- systém, který nemá jednoznačně určený časový vývoj;
- jeho rovnováha v daném čase nastává typicky pro nekonečně mnoho stavů;
- i při určení všech silových účinků a všech počátečních (či okrajových) podmínek nelze jednoznačně stanovit finální konstelaci prvků systému;
- veličiny charakterizující systém nejsou popsány funkcemi, ale hustotami pravděpodobnosti;
- příklady:
  - systém molekul v nádobě s vodou;
  - dav fanoušků fotbalového týmu;
  - akcie na burze;
  - systém těles propojených pružinami o různých tuhostech;



Hustota pravděpodobnosti (distribuce)

- jedná se o specifickou funkci jedné proměnné;
- popisuje, jakým způsobem je rozložena pravděpodobnost všech přípustných výsledků;
- umí zodpovědět libovolný pravděpodobnostní dotaz

$$P[X \in A] = ?$$

$$P\left[X_{\text{mzda}} \in \langle 35\,000, 45\,000 \rangle\right] = ?$$

týkající se zkoumané náhodné proměnné X;

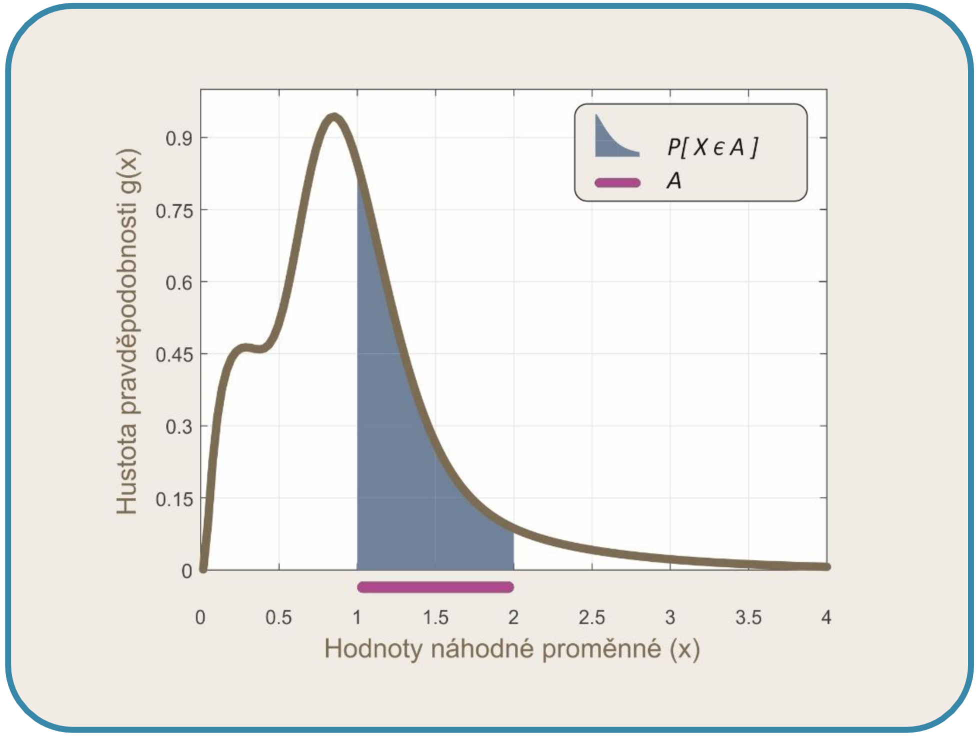
- pro libovolný pravděpodobnostní dotaz platí:

$$P[X \in A] = \int_A g(x)\,\mathrm{d}x$$

- je nutně nezáporná a normovaná na jedničku, tj.

$$P[X \in \mathbb{R}] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$g(x)\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$$

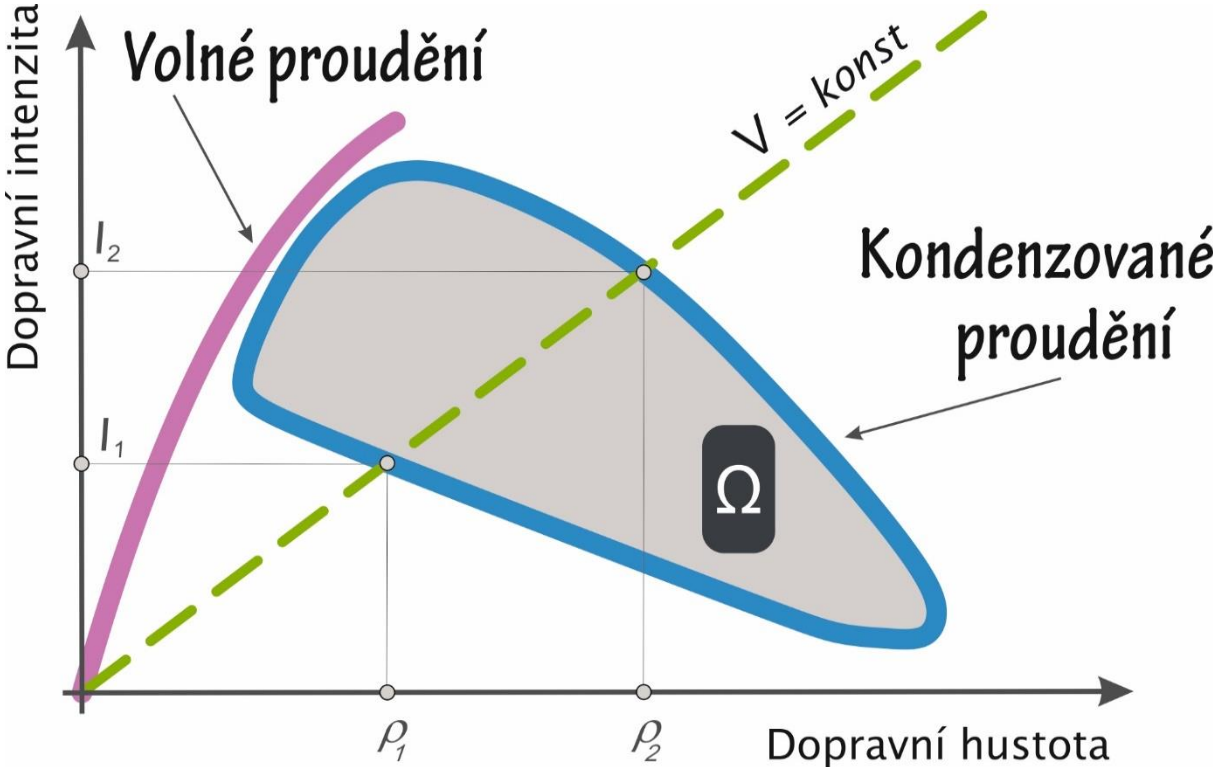


Jak komplikovaný je dopravní systém?

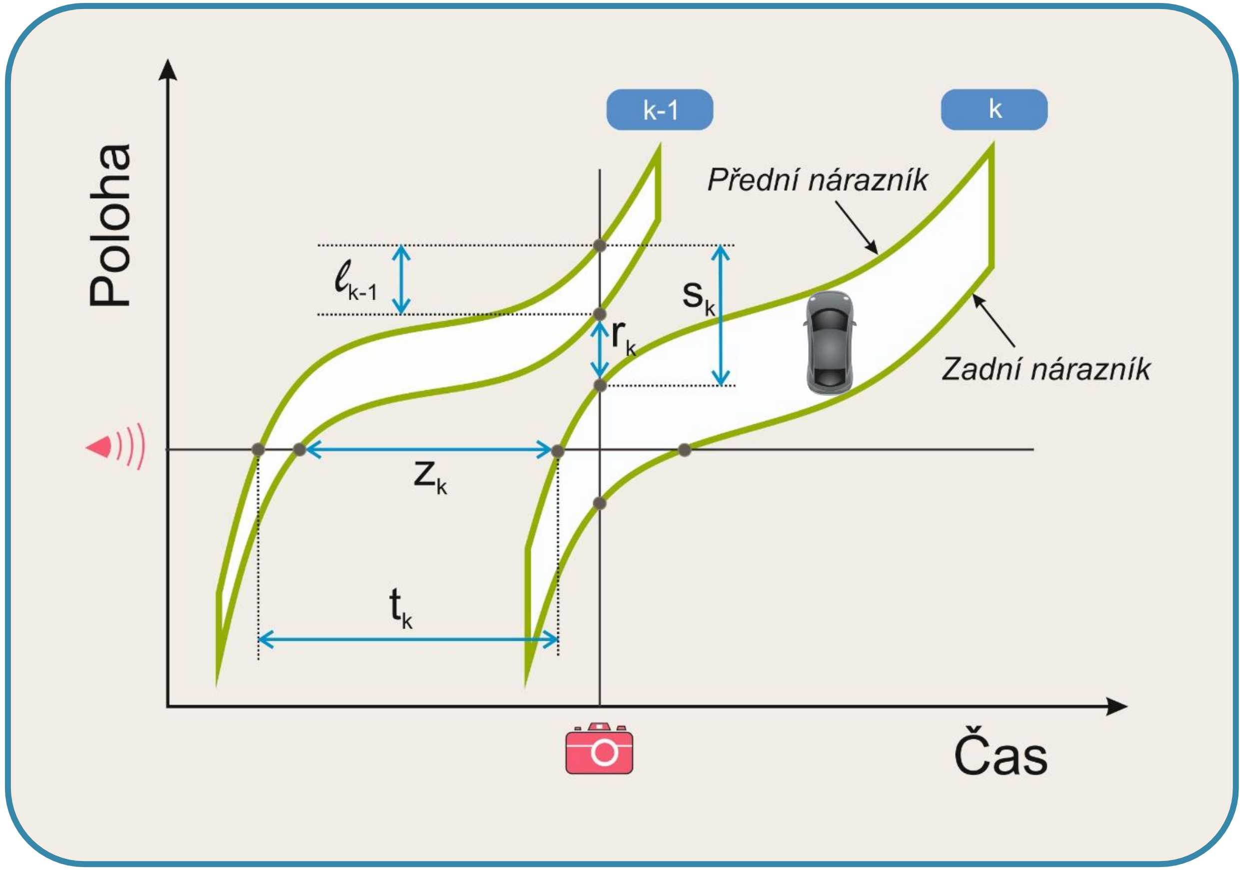
Základní rysy dopravního proudění

- Pohyb mnoha vozidel ve stejném směru
- Pohyb vybraného vozidla je významně závislý na ostatních vozidlech
- Jedná se zcela jistě o stochastický systém
- Popisným aparátem je statistika
- Základními makroskopickými charakteristikami jsou:
  - Dopravní hustota ρ [voz/km]
  - Dopravní intenzita I [voz/h]
  - Průměrná rychlost vybrané skupiny (vzorku) vozidel V [km/h]
- Grafickou představu o vztahu těchto veličin dává tzv. fundamentální diagram

Fundamentální diagram dopravního proudění



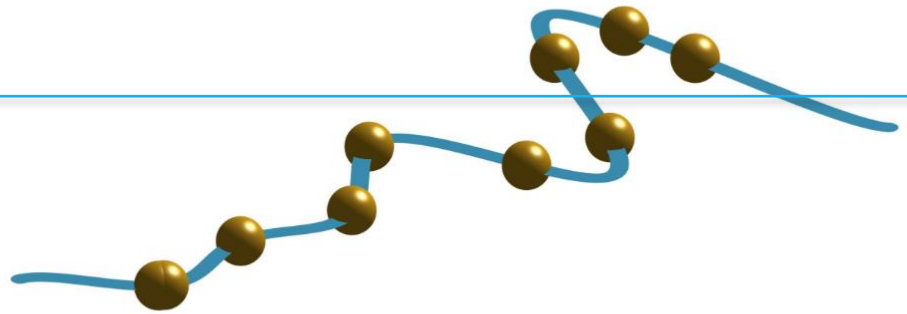
Mikroskopický popis dopravního proudění



- **Prostorový rozestup (space headway):** s_k
- **Prostorová světlost (space clearance):** r_k
- **Časový rozestup (time headway):** t_k
- **Časová světlost (time clearance):** z_k
- **Okamžitá rychlost:** v_k
- **Poloha:** ξ_k

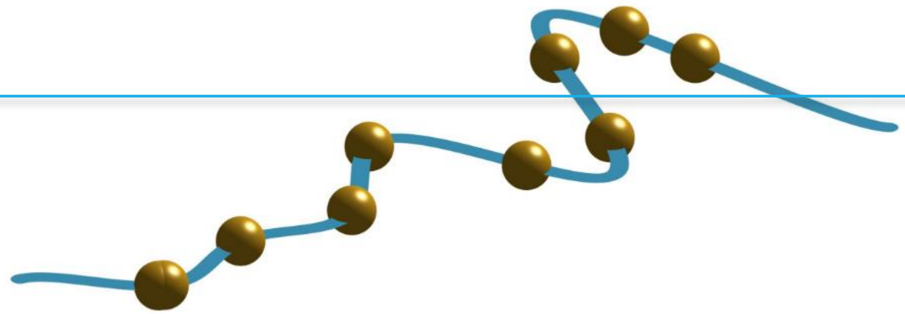
Ve všech případech se se jedná o náhodné proměnné, jejichž distribuce jsou výrazně ovlivňovány hodnotami makroskopických dopravních veličin.

Mikroskopický dopravní model

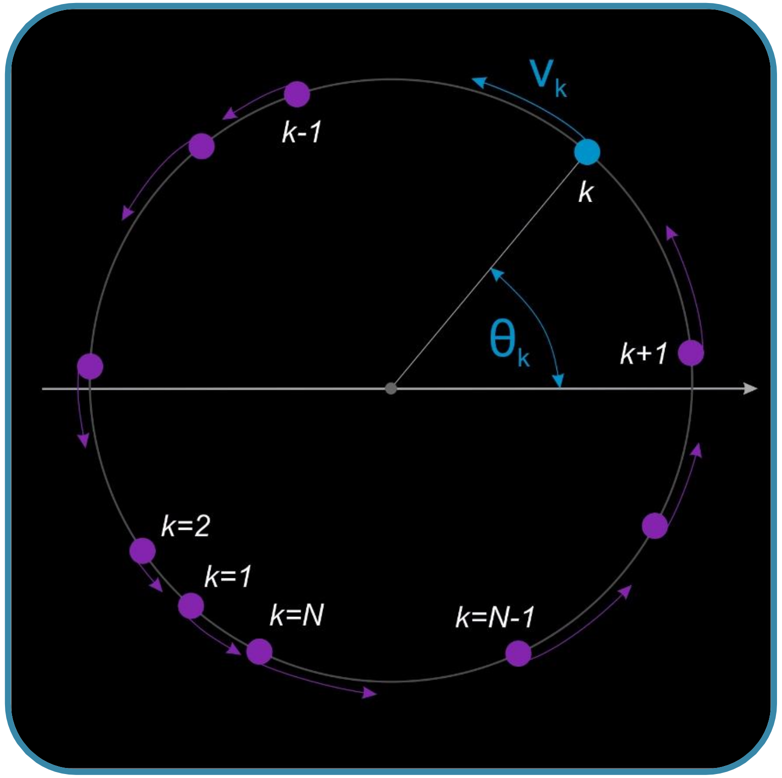


- částice pohybující se po křivce ve stejném směru;
- bez možnosti měnit pořadí;
- částice se při pohybu vpřed ale vzájemně odpuzují – zabraňují tak srážce;
- celý systém je ale zašuměn náhodnými fluktuacemi fiktivních molekul, které vychylují systém z klasické (tj. deterministické rovnováhy) – hovoříme o **teplotní lázni**;
- aktivita teplotní lázně je tím větší, čím větší je její teplota T;
- inverzní teplota $\beta = (k_b T)^{-1}$určuje odolnost systému vůči fluktuacím teplotní lázně
- $\beta = 0$ – maximální vliv teplotní lázně
- $\beta \to +\infty$ – teplotní lázeň systém neovlivňuje (deterministická verze systému)

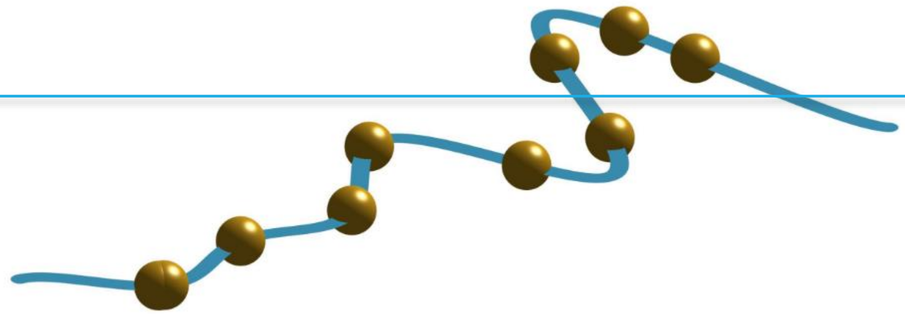
Mikroskopický dopravní model



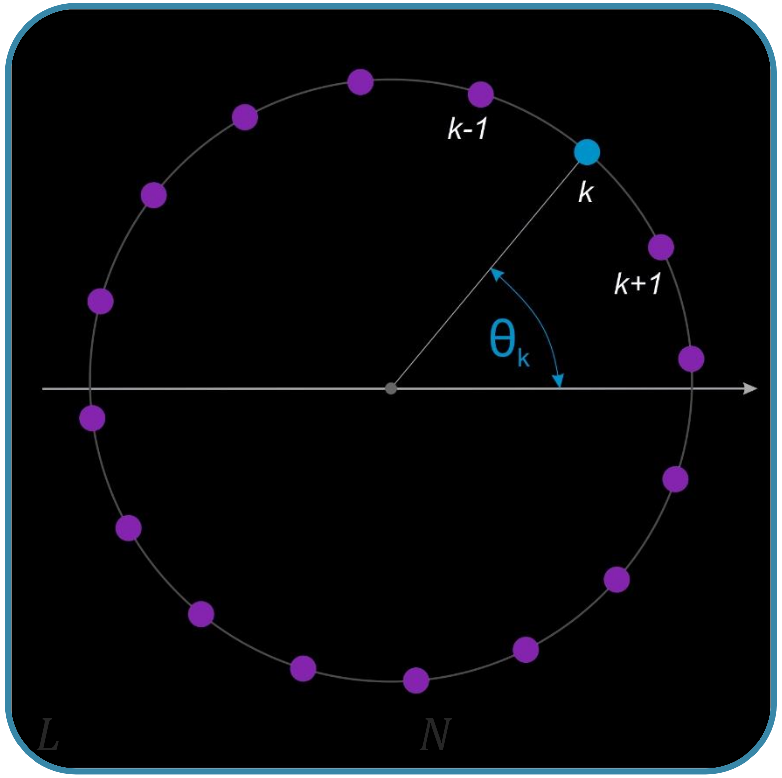
- systém s periodickými okrajovými podmínkami lze vždy převést na kruhovou variantu;
- N … počet částic
- L … délka kružnice



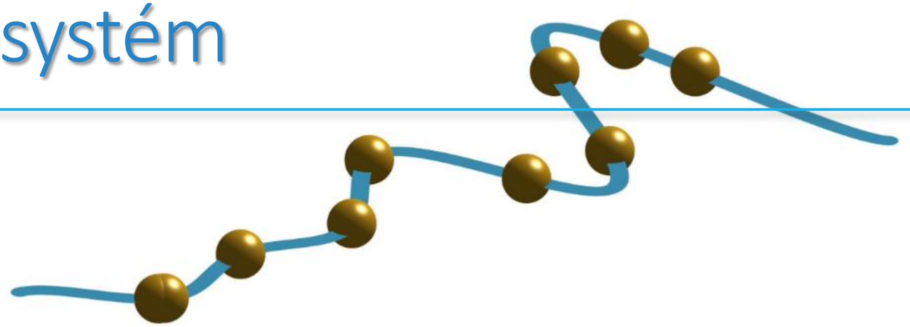
Deterministická varianta: Diracův systém



- $\beta \to +\infty$, tj. $T \to 0$
- teplotní lázeň nemá žádnou energii
- systém tudíž neovlivňuje
- z důvodu odpuzování se částice na kružnici uspořádají ekvidistantně
- jedná se tedy o dokonale uspořádaný systém
- ve variantně $L = N$ jsou všechny rozestupy rovny jedné
- průměrná hodnota rozestupů $= 1$
- rozptyl $= 0$



Maximálně náhodná varianta: Poissonův systém



- $\beta \to 0$, tj. $T \to +\infty$
- teplotní lázeň má na systém maximální možný vliv
- snaží se celý systém vypudit z příliš dokonalého (deterministického) uspořádání
- to způsobuje statistické fluktuace, jejichž míra je úměrná teplotě T
- ve variantě $L = N$ je ale i zde průměrná hodnota rozestupů $= 1$
- pro $T \to +\infty$ přestávají interakce v systému hrát roli (teplotní lázeň má obrovskou energii)
- takže to vlastně odpovídá systému, kdy spolu jednotlivé částice žádným způsobem neinteragují
- Matematika říká: V Poissonově systému je $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
- A odtud pak $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, g(x)\, \mathrm{d}x = 1$ a $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, g(x)\, \mathrm{d}x = 2$, tj. $\mathrm{VAR}(X) = 1$.

Diracův a Poissonův systém – dvě hranice pro částicové systémy

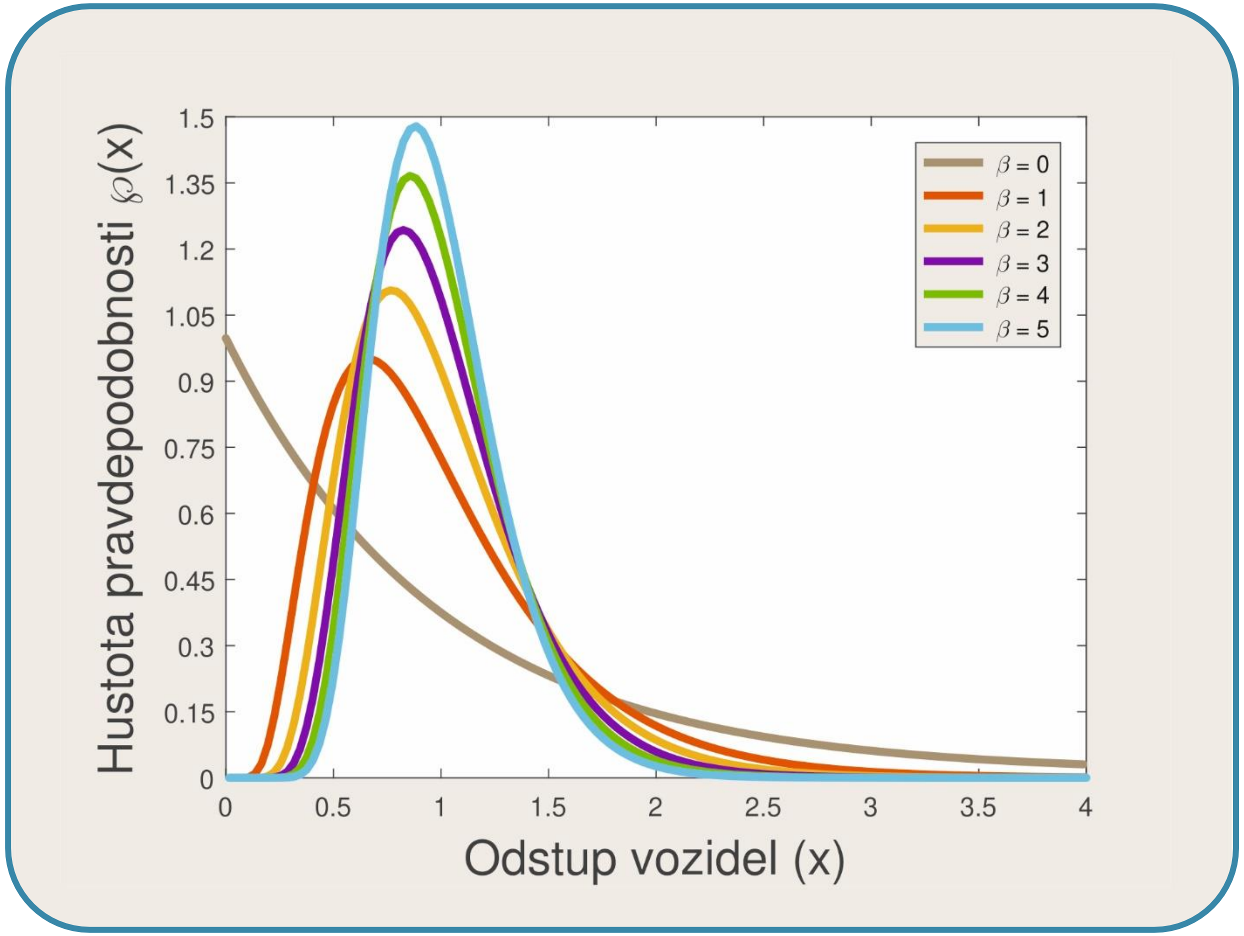
- Jedná se o dvě krajní varianty částicového systému;
- Diracův systém je absolutně organizovaný;
- Poissonův je absolutně stochastický – generuje stavy s nejvyšší mírou fluktuací;
- Míra fluktuací se ale ve statistice popisuje veličinou nazývanou rozptyl: $\mathrm{VAR}(X)$
- $\mathrm{VAR}(X) = 0$ … Diracův systém
- $\mathrm{VAR}(X) = 1$ … Poissonův systém
- Všechny ostatní varianty leží mezi těmito dvěma hraničními, tj. platí pro ně, že $0 < \mathrm{VAR}(X) < 1$

  - $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k = 1$
  - $\mathrm{VAR}(X) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x})^2$

Zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení

$$\wp(x) = Ax^{\alpha}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}$$

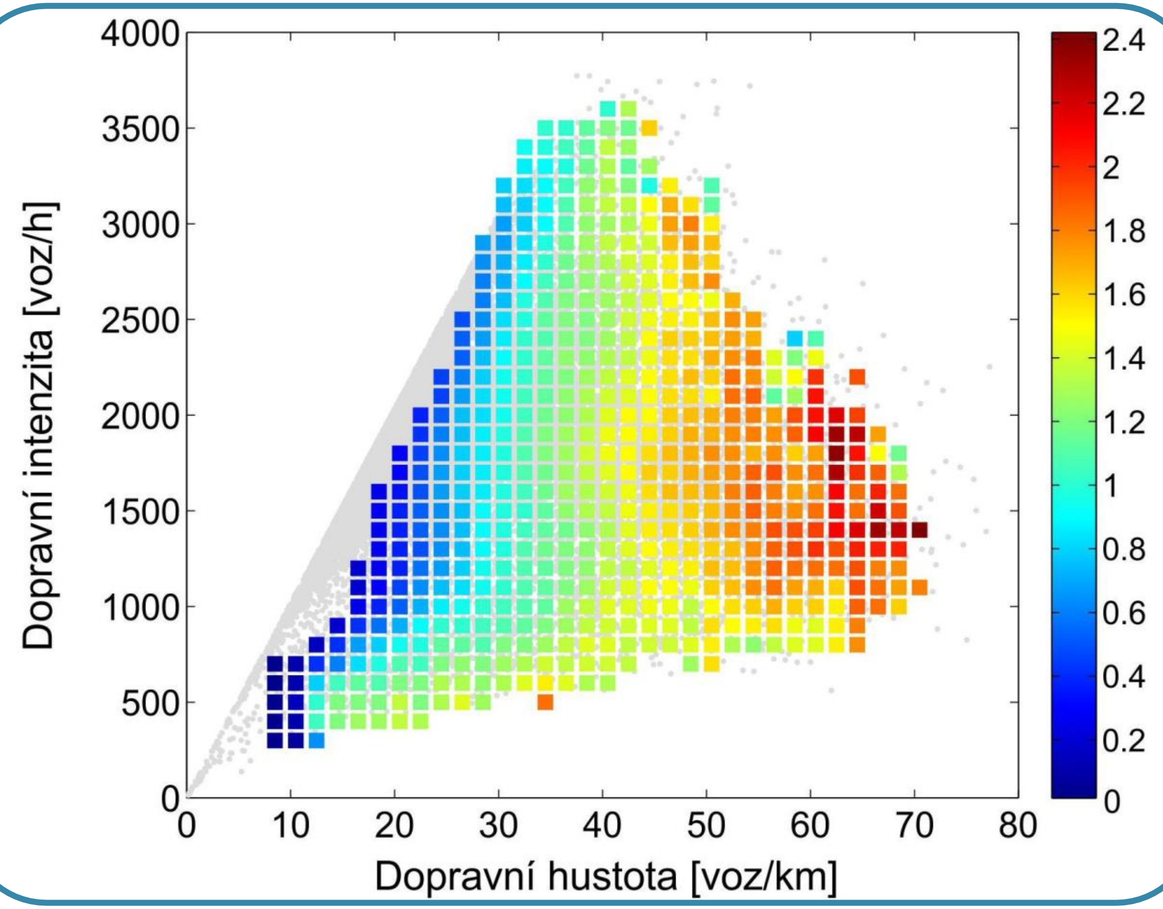
- Funkce $\wp(x)$ závisí fakticky pouze na parametrech α a β.
- Hodnoty A a λ jsou dopočteny na základě hodnot α a β tak, aby $\wp(x)$ byla hustotou pravděpodobnosti a ve správné škále.
- Symbol x reprezentuje vzdálenost dvou za sebou jedoucích vozidel.
- Vykreslena je varianta pro $\alpha = 0$.



Výsledek odhadování parametrů z dopravních dat

$$\wp(x) = A x^{\alpha} e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x}$$

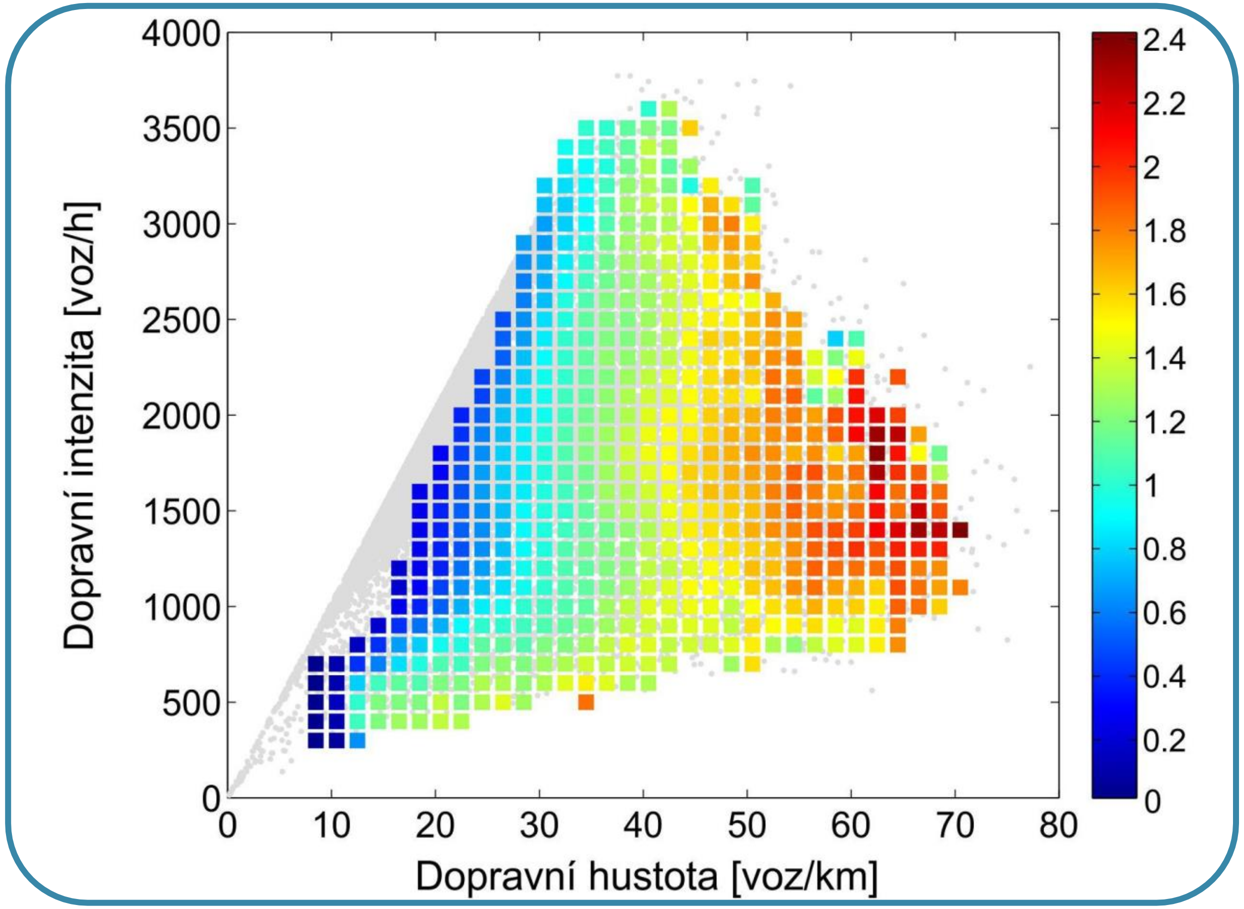
- Metodou maximální věrohodnosti hledáme optimální hodnoty parametrů $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ v distribučním modelu $\boldsymbol{\wp(x)}$.
- Užíváme k tomu data naměřená na evropských dálnicích (zde holandská dálnice A9).
- Zde prezentujeme pouze výsledky pro pomalý dálniční pruh, kdy v souladu s teorií dopravního proudu volíme $\boldsymbol{\alpha = 0}$.
- Parametr $\boldsymbol{\beta}$ má význam tzv. statistické rezistivity, tj. odolnosti systému vůči statistickému šumu.



Výsledek odhadování parametrů z dopravních dat

$$\wp(x) = Ax^{\alpha}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}$$

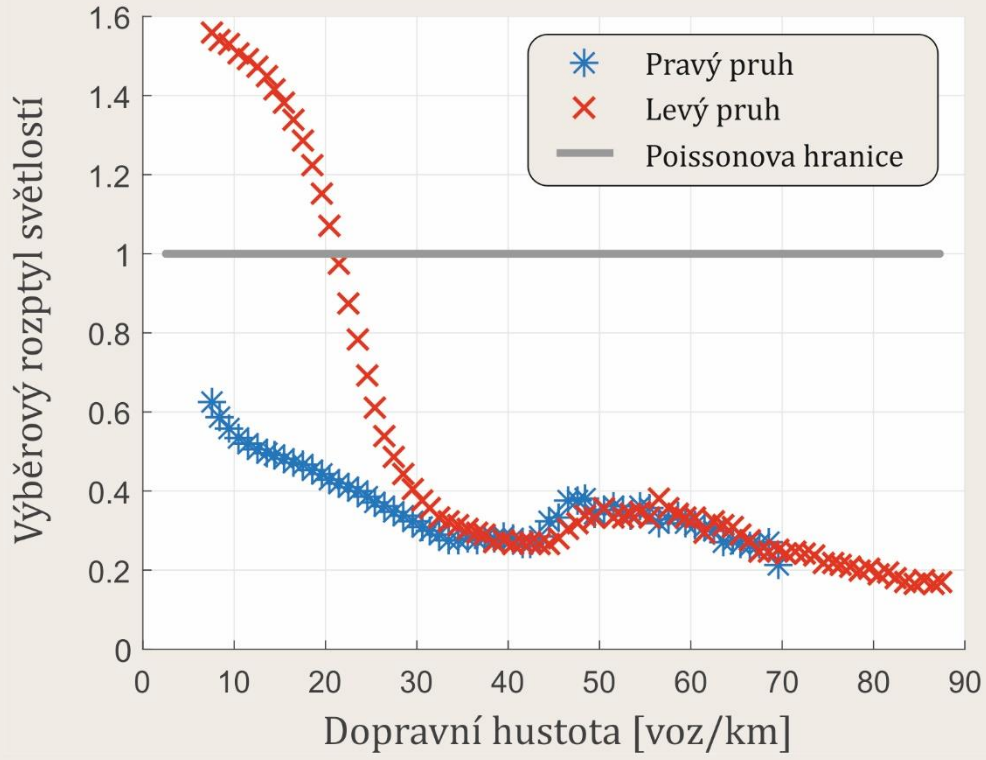
- Pro nízké hodnoty dopravní hustoty ρ je rezistivita β velice nízká – v systému působí silné fluktuační vlivy.
- S rostoucí hustotou ρ rezistivita β významně roste – v systému jsou statistické fluktuace postupně potlačeny.
- Uspořádání dopravního systému se pro narůstající hustotu ρ přibližuje ekvidistantnímu uspořádání vozidel.



Analýza rozptylu dopravních dat

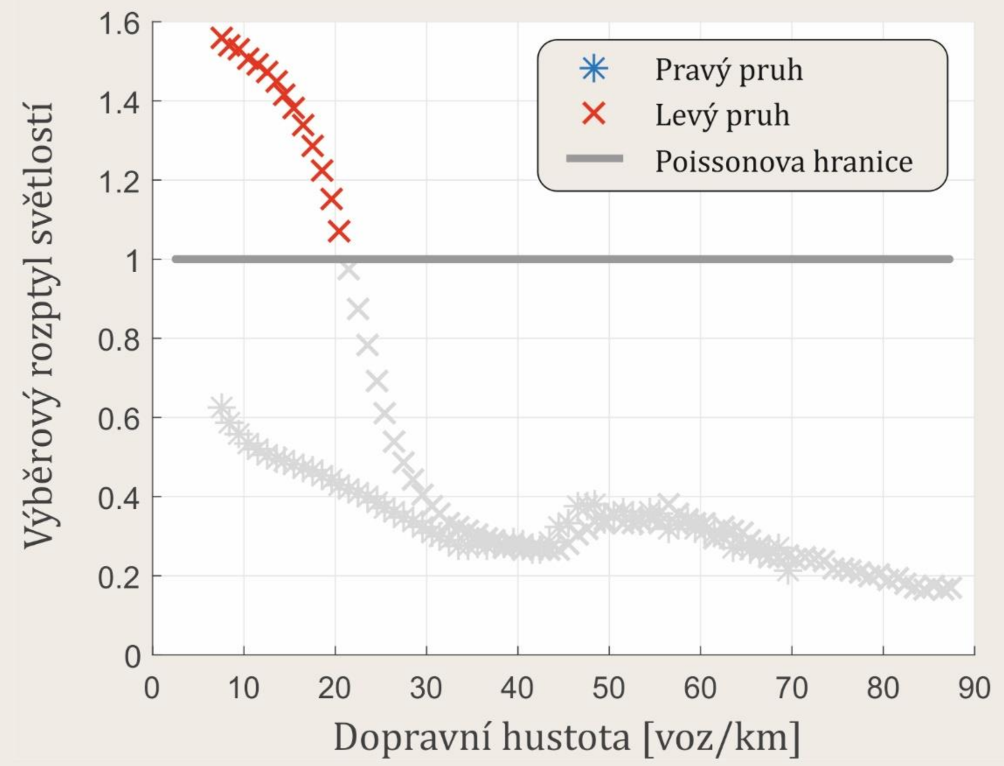
?

- V pravém pruhu se rozptyly chovají spořádaně.
- Ovšem rychlý pruh to je jiná káva…



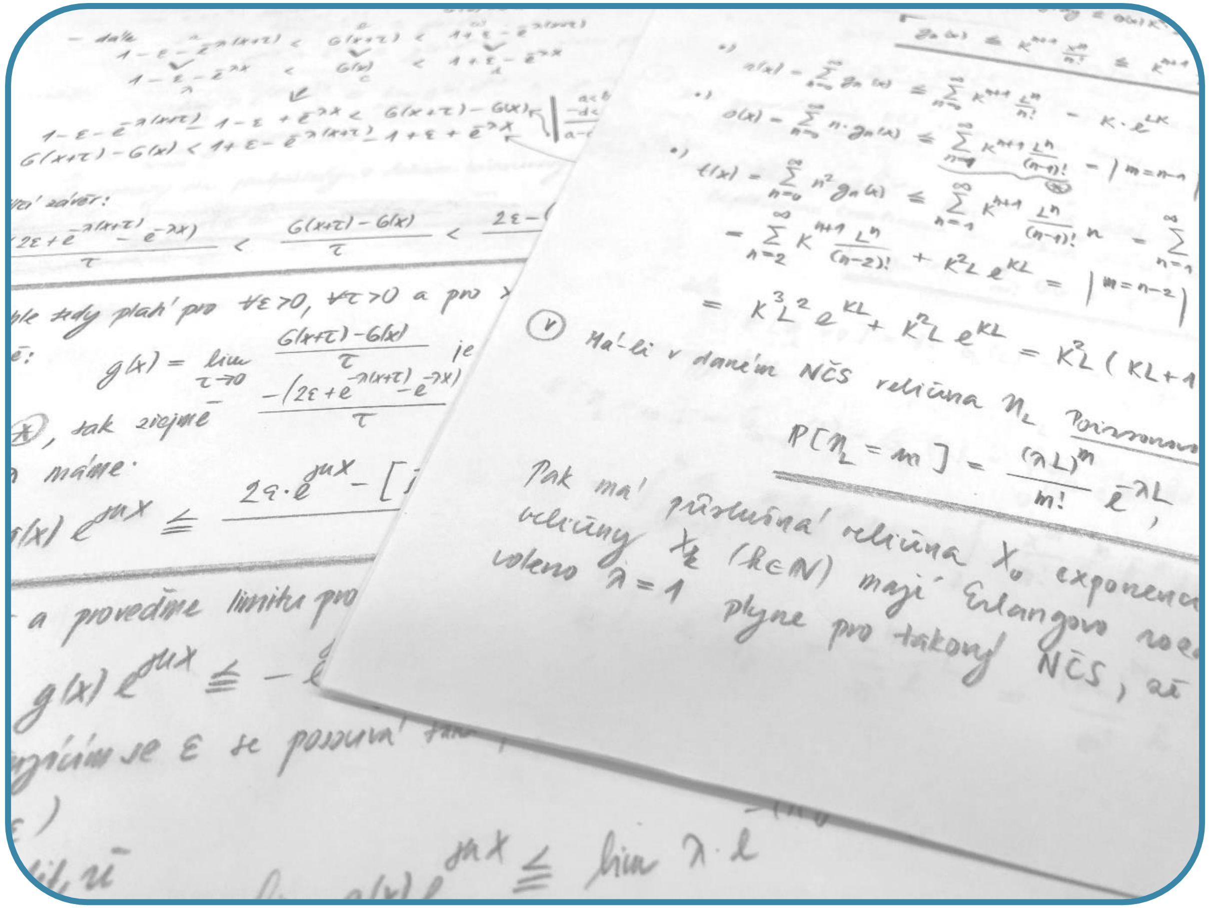
… náhodnější než nejnáhodnější

- V dopravních datech byly detekovány stavy s výrazně větší fluktuační mírou než mají Poissonovské systémy.
- Jak je to možné?
- Jsou takové stavy vůbec teoreticky přípustné?
- Co je příčinou jejich vzniku?
- A odkud se bere takový zásadní rozdíl mezi levým a pravým pruhem?



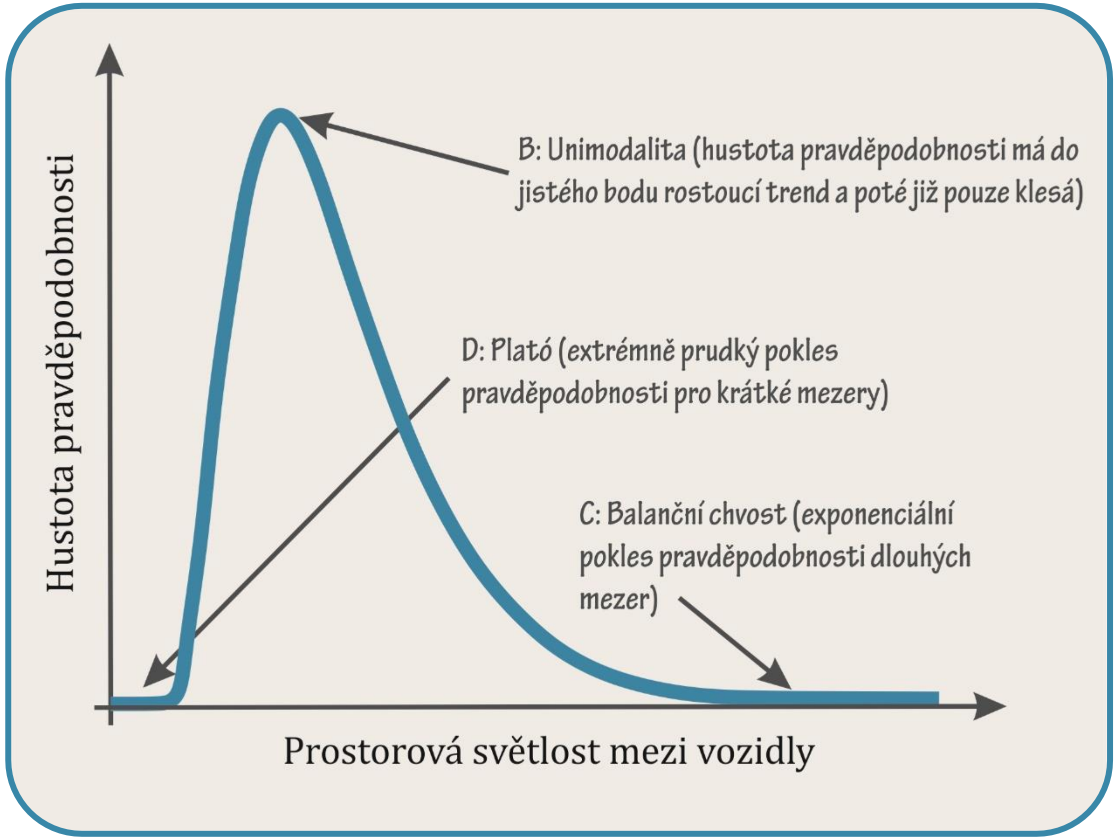
Konečně ta matematika…

- Použitý dopravní model je analyticky řešitelný.
- Pro částicové systémy existuje příslušná matematická teorie.
- Hustoty pravděpodobnosti pro vzdálenost částic jsou z jisté specifické třídy.
- Jedná se o třídu $\mathcal{B}$ tzv. balancovaných hustot.

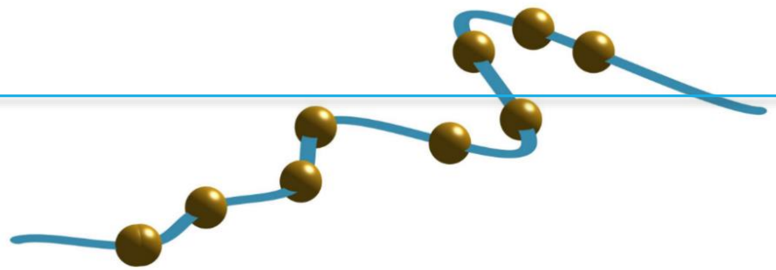


Třída hustot $\mathcal{B}$

- příslušnost ke třídě $\mathcal{B}$ balancovaných hustot
  1. $h(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  2. $Dom(h) = \mathbb{R}$;
  3. $Ran(h) \subset [0, +\infty)$;
  4. $supp(h) \subset [0, +\infty)$;
  5. $h(x) \in PC(\mathbb{R})$;
  6. $h(x) \in L(\mathbb{R})$;
  7. $\exists \omega > 0$:
     - $\alpha > \omega \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) \mathrm{e}^{\alpha x} = +\infty$
     - $\alpha < \omega \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) \mathrm{e}^{\alpha x} = 0$
  8. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \lim_{x \to 0} x^{-n} h(x) = 0$
  9. $\|h\| = \mu_0(h) = \mu_1(h) = 1$



Řešitelnost fyzikálního modelu



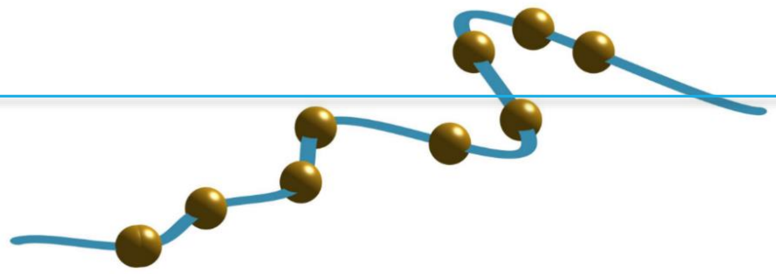
- Termální rovnováha dopravního plynu je analyticky řešitelná.
- A to bez ohledu na to, zda je známa konkrétní podoba interakčních sil v systému.
- Analytickou cestou je možno odvodit, jaká je distribuce vzdáleností mezi částicemi.
- Výsledek ovšem závisí na konkrétní volbě silového popisu.
- Obecná repulzivní (odpudivá) síla má tyto vlastnosti:

$$F(x) \in C(0,+\infty), \quad F(x) \geq 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0+} F(x) = \infty$$

- K ní pak přísluší potenciál $\varphi(x)$, pro který $F(x) = -\varphi'(x)$
- Výsledná distribuce:

$$g(x) = Ae^{-\beta\varphi(x)}\, e^{-\lambda x}$$

Limity výsledné distribuce



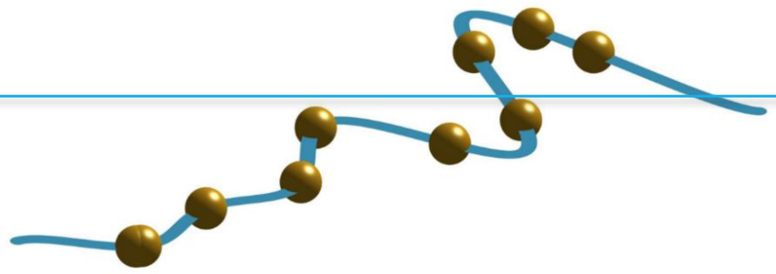
$$g(x) = Ae^{-\beta\varphi(x)}\, e^{-\lambda x}$$

- Klíčový důkaz:
- Je-li silové působení mezi částicemi čistě repulzivní, pak pro rozptyl vzdáleností sousedů platí, že

$$\mathrm{VAR}(X) \leq 1$$

- To značí: V systémech částic, které se odpuzují, nemůže rozptyl přesáhnout hranici vymezenou Poissonovým systémem.

Možná vysvětlení supernáhodných vzorků

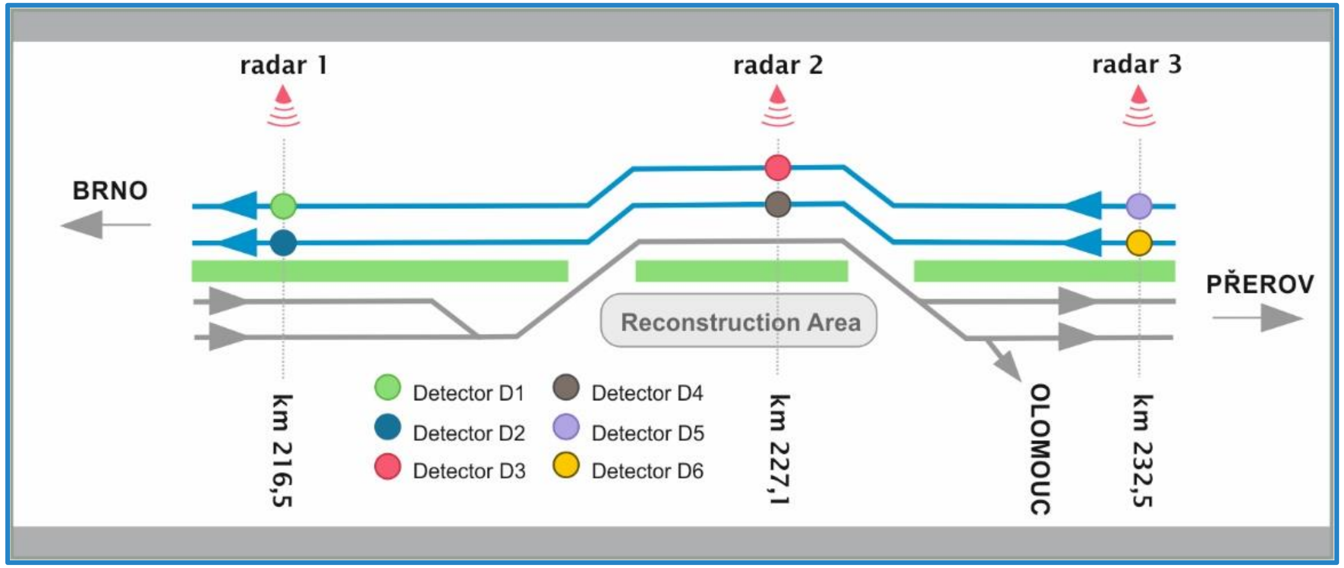


1. Dopravní systém není systémem s krátkodosahovými interakcemi.
2. Odchylky mezi modelem a empirickým systémem jsou způsobeny tím, že se v reálném dopravním systému nezachovává počet vozidel v pruhu. To platí zejména pro oblasti volného proudění, kdy předjíždění přináší řidiči kompetitivní výhodu. Ta s rostoucí hustotou dopravy vymizí.
3. Dopravní systém vykazuje vyšší fluktuace než systémy poissonovské z důvodu přítomnosti slabších interakčních impulzů, které doplňují standardní repulzi zabraňující kolizi vozidel. Tato atraktivní složka připouští vyšší hodnoty rozptylu prostorových světlostí.

Teoretická a experimentální prověření hypotéz

1. Změní-li se v dopravním modelu interakce z krátkodosahové na střednědosahovou (při zachování ostatních parametrů), rozptyl vzdáleností sousedních částic poklesne.

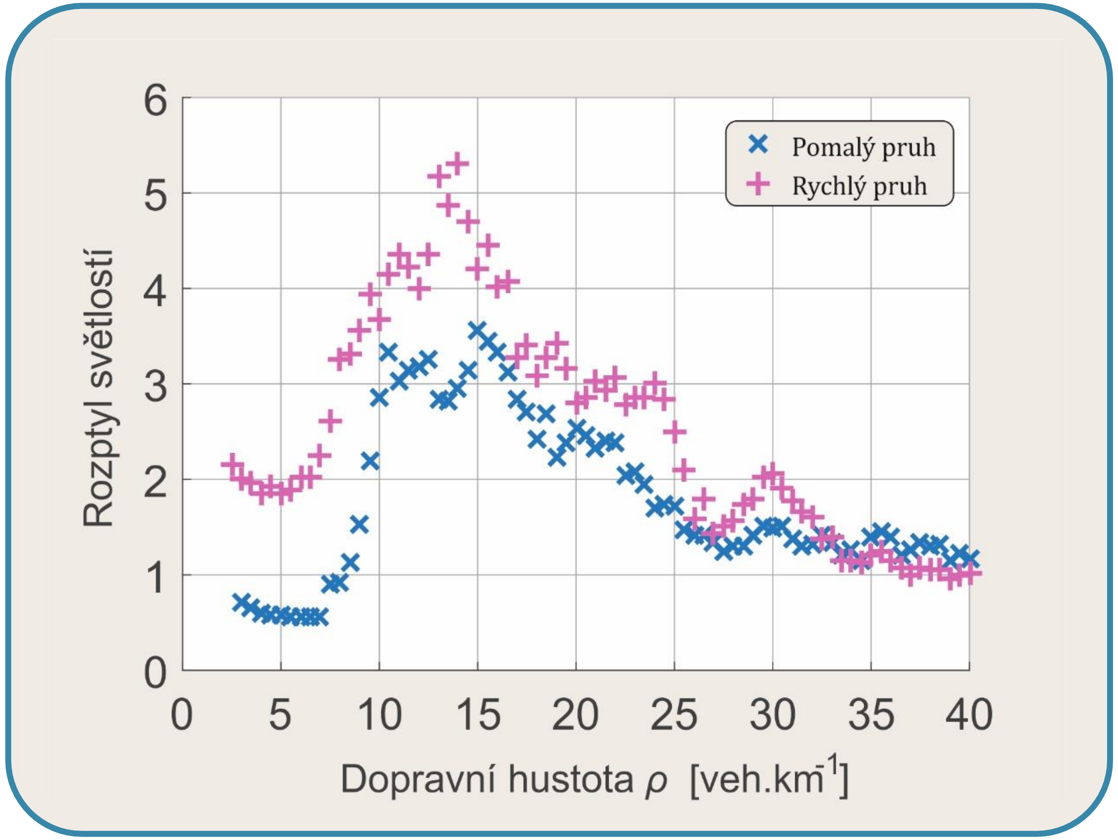
2. Mezi zbylými dvěma argumentacemi je třeba rozhodnout experimentálně. A to za pomocí analýzy dálničních dat.



Analýza dat a její důsledky

- Separace dopravních pruhů nijak významně nezredukovala přítomnost supernáhodných stavů.
- Základní rozčlenění na standardní a supernáhodné oblasti se nezměnilo.
- Občasné změny jízdního pruhu vozidel na dálnici zjevně nemají žádný zásadní vliv na chování rozptylu.
- Ani razantní omezení maximální dovolené rychlosti nezabránilo vzniku anomálních stavů.

Analýza rozptylu



Summary

- Anomalitu některých stavů dopravního systému byla vysvětlena přítomností slabší atraktivní komponenty v dynamickém popisu dopravního proudění.
- Přítomnost této přitažlivé složky ve fyzikálním dopravním modelu mění tvar příslušné headway distribuce na tříparametrické GIG rozdělení:

$$g(x) = Ax^{\alpha} e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x}$$

- $\alpha < 0$ – dodatečný parametr vynucený přítomností atraktivní složky
- Výrazným způsobem to vylepšuje statistické odhady empirických headway-distribucí.
- Zároveň to umožňuje detekovat podíl atraktivní komponenty na celkové dynamice.

Děkuji za pozornost