

Domácí úlohy 3.

do 1.6. 12:00

Úkoly odevzdávejte na prosemináři nebo je pošlete na email `david.stanovsky@matfyz.cuni.cz` v jednom souboru ve formátu `Prijmeni_cislosady.PDF` (čitelný sken v jednom souboru, na bílém pozadí bez tmavých okrajů). Uveďte také svoji přezdívku, pod kterou řešíte kahooty a pod kterou uvidíte výsledky na webu.

1. (5 bodů) Napište následující copánek jako složení elementárních copánků $\sigma_1, \dots, \sigma_4$. Zkuste najít co nejkratší slovo určující tento copánek, ale nesnažte se dokázat, že je opravdu nejkratší (to je taky algoritmicky obtížný problém, ví se, že je NP-hard, tj. lze na něj převést SAT solving).



2. (5 bodů) Dokažte, že kvaternionová grupa Q_8 má prezentaci

$$Q_8 \simeq \langle a, b \mid aba = b, bab = a \rangle.$$

3. (5 bodů) Napište fundamentální grupu (a) objektu, který sestává z hran krychle, (b) objektu, který sestává ze stěn krychle, (c) krychle.

4. (5 bodů) Vezměte kruh a slepte středově symetrické body na hranici (tj. pokud vezmeme kruh o poloměru 1 se středem v $(0, 0)$, slepíme právě body (a, b) a $(-a, -b)$, kde $a^2 + b^2 = 1$). (Nesnažte se lepit kus papíru, to je marné. Kreslete placaté obrázky jako pro torus a Kleinovu lahev.) Výsledný prostor má fundamentální grupu izomorfní \mathbb{Z}_2 . Konkrétně, zvolme bázový bod e na hranici kruhu. Napište mi, které cesty budou ekvivalentní triviální cestě a které ne, zdůvodněte proč součin dvou netriviálních cest lze zkontrahovat do bodu (stačí neformálně, rozkreslete animaci). *Návod:* průměr kruhu je cesta.

Taky si můžete rozmyslet, že právě popsany prostor je totéž jako reálná projektivní rovina, čili $\pi_1(P^2\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_2$.