

Domácí úlohy 2.

do 18.5. 12:20

Úkoly odevzdávejte na prosemináři nebo je pošlete na email `david.stanovsky@matfyz.cuni.cz` v jednom souboru ve formátu `Prijmeni_cislosady.PDF` (čitelný sken v jednom souboru, na bílém pozadí bez tmavých okrajů). Uveďte také svoji přezdívku, pod kterou řešíte kahooty a pod kterou uvidíte výsledky na webu.

1. (5 bodů) Nakreslete karty Dobble s pěti symboly na každé kartě (kolik jich bude?). Pokud se vám to nechce dělat ručně, napište si na to počítačový program. Můžete mi karty vyfotit, nebo poslat výpis, jaké symboly budou na které kartě, nebo velmi podrobně popište postup a nakreslete či popište aspoň pět karet.

Návod: přímkou v projektivní rovině nad vhodně velkým tělesem

2. (5 bodů) Buď γ křivka zadaná parametricky jako $\gamma(\theta) := (1 - \cos^2 \theta, \tan \theta - 1/2 \sin 2\theta)$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ a ϕ křivka zadaná jako $\phi(t) := (2 - 6t^2, 6t - 2t^3)$. Dokažte, že se jedná o algebraické křivky a určete počet jejich průsečíků (počítáno s násobností) v komplexní projektivní rovině.

Návod: nemusíte počítat soustavy rovnic, můžete použít Bézoutovu větu (ale klidně si to vykreslete v nějakém software, ať vidíte, co počítáte)

3. (5 bodů) Buď γ algebraická křivka v komplexní projektivní rovině zadaná rovnicí $3x^3 - x^2y - 2xy^2 - y^3 - 3x^2 - 14xy - 4y^2 - 11x + 3y + 3 = 0$. Určete její stupeň a rozhodněte, zda se jedná o eliptickou křivku. Dále najděte projektivní transformaci, která křivku převede do tvaru $y^2 = x^3 + ax + b$, kde a, b jsou nějaké konstanty.

4. (5 bodů) Uvažujte eliptické křivky zadané polynomy (a) $f = y^2 - x^3 - 4x$, (b) $g = y^2 - x^3 + x$. Prozradím vám, že tyto křivky obsahují přesně tři afinní body s racionálními souřadnicemi. Rozhodněte, která z grup $E_{\mathbb{Q}}(f)$, $E_{\mathbb{Q}}(g)$ je izomorfní grupě \mathbb{Z}_4 a která $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

5. (5 bodů) O následujících maticích rozhodněte, zda patří do ortogonální grupy $O(4)$. Pokud ano, určete, o jaký typ zobrazení jde (identita, reflexe, rotace, nepřímá rotace, dvojrotace) a napište ho jako součin reflexí.

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & -4 \\ -5 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

6. (5 bodů) Buď G grupa symetrií roviny generovaná zobrazeními $g: (x, y) \mapsto (x, -y)$ a $h: (x, y) \mapsto (y, x)$. Najděte dva algebraicky nezávislé nekonstantní polynomy $P(x, y), R(x, y)$ co nejnižšího stupně, které jsou fixovány prvky g a h , to jest které se nezmění, pokud zaměníme y za $-y$ nebo pokud prohodíme x a y .

Návod: součin stupňů P a R je velikost grupy G , a jejich součet je počet proměnných (tj. v našem případě 2) + počet reflexí v G .