

2. sada cvičení

Téma: Homomorfismy, faktorgrupy.

Znalost řešení se ověřuje zápočtovým testem 19.10.2026 12:20.

Homomorfismy.

1. Najděte všechny homomorfismy

- $\mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_{15} \rightarrow \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$,
- $\mathbb{Z}_{10} \rightarrow S_3$, $\mathbb{Z}_{11}^* \rightarrow S_3$,
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow S_3$,

2. Najděte všechny homomorfismy $S_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ a $S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_n$.

3. Najděte všechny homomorfismy $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ a spojitě homomorfismy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Existuje nějaký nespojitý?

Izomorfismus.

4. Najděte izomorfismus:

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_8^* \simeq K$, kde $K = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \leq S_4$.
- $GL_2(\mathbb{Z}_2) \simeq S_3$. *Návod:* jak vypadají lineární operátory na $\mathbb{Z}_2^2$?
- $\mathbb{R}^+ \simeq \mathbb{R}$. *Návod:* exponenciála.
- $\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{R}^+ \times S$, kde S je podgrupa komplexních jednotek v grupě $\mathbb{C}^*$. *Návod:* goniometrický tvar.
- $\mathbb{Q}^+ \simeq \mathbb{Z}[x]$, kde $\mathbb{Z}[x]$ se bere vzhledem k operaci sčítání. *Návod:* prvočíselný rozklad.

5. Rozhodněte, zda

- $D_8 \simeq Q_8$?
- $D_{12} \simeq A_4$?
- $D_{12} \simeq S_3 \times \mathbb{Z}_2$?
- $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$?

6. Rozložte grupy $\mathbb{Z}_{16}^*$, $\mathbb{Z}_{20}^*$ a $\mathbb{Z}_{27}^*$ na direktní součin cyklických grup, tj. napište konkrétní direktní součin, jemuž jsou tyto grupy izomorfní. *Návod:* čínská věta o zbytcích a řády prvků.

(7.) Existuje n takové, že $\mathbb{Z}_n^*$ je izomorfní (a) $\mathbb{Z}_7$, (b) $\mathbb{Z}_8$, (c) $\mathbb{Z}_9$?

8. Dokažte, že

- každá čtyřprvková grupa je izomorfní grupě $\mathbb{Z}_4$ nebo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- každá šestiprvková grupa je izomorfní grupě $\mathbb{Z}_6$ nebo S_3 . *Návod:* Lagrangeova a Cauchyova věta.

Vnoření.

(9.) Každá grupa se dá vnořit do nějaké grupy permutací. Konkrétně, vezmi $G \rightarrow S_G$, $x \mapsto \lambda_x$, kde $\lambda_x(y) = xy$. Ověřte, že to je prostý homomorfismus.

(10.) Grupa S_n se dá vnořit do grupy $GL_n(T)$, pro libovolné těleso T . V případě tělesa $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$, to lze dokonce do grupy O_n , resp. U_n . *Návod:* permutační matice z lineární algebry.

Důsledkem předchozích cvičení je, že konečná grupa řádu n lze vnořit do grupy $GL_n(T)$: složte obě vnoření. Optimální velikost matic může záviset na tělese. Například D_{2n} lze vnořit

do grupy $GL_2(\mathbb{R})$ (dokonce do ortogonální grupy O_2), ale jen do některých $GL_2(\mathbb{Z}_p)$. Zajímavější je případ kvaternionové grupy.

(11.) Dokažte, že předpis

$$i \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

lze rozšířit do vnoření $Q_8 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$. Existuje vnoření $Q_8 \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$?

(12.) Rozhodněte, zda lze S_n vnořit a) do A_{n+1} , b) do A_{n+2} .

Normální podgrupy.

13. Podívejte se na úlohy na svaz podgrup z minulé série. Ve všech svazech, které jste spočetli, zakroužkujte normální podgrupy. Zvlášť podnětná je tato úloha pro grupy D_8 , Q_8 a A_4 .

14. Buď G grupa a H její podgrupa taková, že $[G : H] = 2$. Dokažte, že H je normální.

Faktorgrupy

15. Popište pomocí 1. věty o izomorfismu, jak vypadají faktorgrupy $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^*/\{1, -1\}$ a $\mathbb{C}^*/N$, kde N značí podgrupu čísel s absolutní hodnotou 1.

16. Popište grupy $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

17. Dokažte, že $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_n \simeq \mathbb{C}^*$.

18. Které malé grupě je izomorfní grupa S_4/K , kde K je (ta jediná) čtyřprvková (Kleinova) normální podgrupa.

19. Popište všechny faktorgrupy kvaternionové grupy Q_8 (navazte na úlohu o normálních podgrupách výše).

20. Dokažte, že $D_{4n}/N \simeq D_{2n}$, kde N je podgrupa generovaná středovou symetrií.

(21.) Dokažte, že $PSL_2(\mathbb{Z}_3) \simeq A_4$. *Návod:* uhodni homomorfismus, třeba projektivní zobrazení permutují přímky v $\mathbb{Z}_3^2$. *Jiný návod:* jsou to malé grupy, spočti řady prvků.

(22.) Nechť $N \trianglelefteq G$ a buď $A, B \subseteq G$ takové, že $N = \langle A \rangle$, $G/N = \langle B/N \rangle$. Dokažte, že $G = \langle A \cup B \rangle$.

Věty o izomorfismu

(23.) Buď M maximální podgrupa G . Předpokládejme, že M je normální. Dokažte, že index $[G : M]$ je konečný a navíc prvočíslo. *Návod:* podgrupy ve faktorgrupách.

(24.) Buď N normální podgrupa konečné grupy G . Předpokládejme, že $\text{NSD}(|N|, [G : N]) = 1$. Dokažte, že N je jediná podgrupa řádu $|N|$ v G . *Návod:* uvažuj takovou H a napiš si řady grup v třetí větě o izomorfismu.