

1. sada cvičení

Téma: Podgrupy, generátory.

Znalost řešení se ověřuje zápočtovým testem 19.10.2026 12:20.

Podgrupy.

1. Tvoří sudá čísla podgrupu grupy $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_{16}$? Tvoří lichá čísla podgrupu grupy $\mathbb{Z}_{15}^*$, $\mathbb{Z}_{16}^*$?
2. Tvoří podmnožina (a) $\{\pi : \pi^2 = id\}$, (b) $\{\pi : \pi^3 = id\}$, podgrupu grupy (i) A_4 , (ii) S_4 ?

Lagrangeova věta a rozklady.

3. Buď $H, K \leq G$ takové, že $NSD(|H|, |K|) = 1$. Dokažte, že $H \cap K = 1$.
4. Jsou-li H, K podgrupy, musí $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ tvořit podgrupu? Co když je aspoň jedna normální?
- (5.) Buď H, K konečné podgrupy grupy G . Dokažte, že $|H| \cdot |K| = |H \cap K| \cdot |HK|$, kde $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$. *Návod:* použijte podobnou metodu jako v důkazu Lagrangeovy věty.

Řád prvku.

6. Popište prvky konečného řádu v $\mathbb{C}^*$. Tvoří podgrupu?
7. Tvoří prvky konečného řádu podgrupu? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, uveďte protipříklad a rozmyslete si stejnou otázku pro abelovské grupy. *Návod:* reflexe v grupě izometrií roviny.
8. Existuje prvek řádu 9, 10, 11, 12 v S_6 ? V S_7 ? *Návod:* jaký je řád permutace sestávající z cyklů délek $k_1, \dots, k_m$?
9. Spočítejte řád matic $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ v grupě $GL_2(\mathbb{Z}_p)$.
10. Buď G abelovská grupa, která neobsahuje prvky řádu 2. Čemu je roven součin $\prod_{a \in G} a$?
11. Uvažujte předchozí otázku pro grupu $\mathbb{Z}_p^*$, p prvočíslo. Přeformulujte odpověď do jazyka elementární teorie čísel (říká se tomu Wilsonova věta).
- (12.) Dokažte, že grupa, kde má každý prvek řád nejvýše 2, je abelovská.
- (13.) Uvažujme grupu G a prvek $a \in G$ takový, že $a^m = 1$. Nechť n je takové, že $NSD(m, n) = 1$. Dokažte, že existuje $b \in G$ takové, že $a = b^n$.

Generátory.

14. Spočítejte $\langle \frac{5}{12}, \frac{5}{8} \rangle_{\mathbb{Q}}$ a obecně $\langle \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \rangle_{\mathbb{Q}}$. *Návod:* Bézout.
15. Jsou grupy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$ konečně generované? Napište co nejmenší množinu generátorů.
16. Dokažte, že $\mathbb{Z}_n = \langle a \rangle$ právě tehdy, když $NSD(a, n) = 1$. *Návod:* Bézout.
17. Dokažte, že D_{2n} je generovaná rotací o $2\pi/n$ a libovolnou reflexí. *Návod:* Lagrange.
18. Dokažte, že $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ je generovaná maticemi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Návod:* Lagrange.

19. Dokažte, že $GL_n(\mathbb{Q})$ je generovaná všemi následujícími maticemi, $t \in \mathbb{Q}$. *Návod:* Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \dots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & t & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \dots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \dots & & \\ & & t & & 1 & \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

20. Dokažte, že $S_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n) \rangle = \langle (1\ 2), (1\ 2\ 3 \dots n) \rangle$. *Návod:* Konjugace.

21. Dokažte, že $A_n = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \dots, (1\ 2\ n) \rangle$. Pro n liché je také $A_n = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3 \dots n) \rangle$. *Návod:* Konjugace.

(22.) Dokažte, že pro p prvočíslo je $S_p = \langle \tau, \rho \rangle$, kde τ je libovolná transpozice a ρ je libovolný p -cyklus. Uveďte protipříklad pro p složené.

(23.) Buď H vlastní podgrupa grupy G . Dokažte, že $\langle G \setminus H \rangle = G$.

Svazy podgrup.

24. Spočítejte všechny podgrupy a zakreslete je jako uspořádanou množinu (svaz) pro následující grupy: S_3, D_8, Q_8, A_4 . *Návod:* Generátory a Lagrange.

25. Spočítejte všechny podgrupy a zakreslete je jako uspořádanou množinu (svaz) pro následující grupy: $\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{30}, \mathbb{Z}_{17}^*$. *Návod:* Generátory a Bézout. *Jiný návod:* struktura cyklických grup.

(26.) Pokud si potřebujete předchozí problém procvičit, tak ještě třeba $\mathbb{Z}_{120}$ a $\mathbb{Z}_{131}^*$.

(27.) Dokažte, že je svaz podgrup modulární. To jest, definujeme-li $A \vee B = \langle AB \rangle_G$, pak pro každé $A \leq B \leq G$ a $C \leq G$ platí $(C \vee A) \cap B = (C \cap B) \vee A$.

Různé podružné zajímavosti.

(28.) Dokažte, že grupy lze axiomatizovat pouze třemi podmínkami: asociativita, existence levého inverzu, existence pravé jednotky.

(29.) Dokažte, že asociativní kvazigrupa je grupa. (Kvazigrupou rozumíme binární algebraickou strukturu, jejíž multiplikační tabulka tvoří latinský čtverec.)