
NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Metoda maximální věrohodnosti a momentová metoda.

Podrobné riešenie príkladov (A) a výsledky (B) zo 4. cvičenia

A Příklady na cvičení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x|\theta_X) \in \mathcal{F} = \{f(x|\theta), \theta \in \Theta\}$.

A1. [Procvičovací] Momentovou metodou najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru $\theta_X > 2$ v modelu \mathcal{F} , kde

$$f(x|\theta_X) = \frac{\theta_X}{x^{\theta_X+1}} \mathbb{I}_{(1,\infty)}(x), \quad (\text{Paretovo rozdělení}).$$

Určete asymptotické rozdělení $\tilde{\theta}_n$.

[Použijte vztahy $E X_i = \frac{\theta_X}{\theta_X-1}$, $\text{var } X_i = \frac{\theta_X}{(\theta_X-1)^2(\theta_X-2)}$.]

Řešení:

Momentová metoda odhadování je založena na existenci konkrétního vztahu (vztahoch) který(é) existuje(ú) mezi neznámým parametrem (resp. neznámými parametry) a některým teoretickým momentem (případně viacerými momentami). Středná hodnota náhodné veličiny je prvním momentem a spolu s druhým centrováním momentem (t.j., rozptyl náhodné veličiny) sa jedná o dva najčastejšie využívané momenty v momentovej metóde odhadovania (samozrejme nie jediné).

Využijeme nápovedu, že středná hodnota a rozptyl náhodné veličiny s Paretovým rozdělením s parametrem $\theta_X > 2$ (parametrizácia hustoty ako v zadaní), sú určené vztahmi

$$\mu_X = E X_i = \frac{\theta_X}{\theta_X - 1} \quad \text{a} \quad \sigma_X^2 = \text{var } X_i = \frac{\theta_X}{(\theta_X - 1)^2(\theta_X - 2)}.$$

Z prvého vztahu jednoduchými úpravami vyjadríme neznámý parameter ako

$$\theta_X = \frac{\mu_X}{\mu_X - 1}$$

a preto príslušný odhad $\tilde{\theta}_n$ neznámeho parametru θ_X získame nahradením teoretickej strednej hodnoty μ_X jej empirickým protejškom – výberovou strednou hodnotou, resp. priemerom \bar{X}_n . Momentový odhad preto je

$$\tilde{\theta}_n = \frac{\bar{X}_n}{\bar{X}_n - 1}.$$

Pre určenie asymptotického rozdelenia tohto odhadu použijeme centrálnu limitnú vetu (CLV) a vhodnú transformáciu. Vieme, že z CLV platí, že

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_X^2), \quad \text{pre } n \rightarrow \infty.$$

Pripomeňme, že sa jedná o tzv. konvergenciu v distribúcii. Tento vzt'ah popisuje asymptotické rozdelenie výberového priemeru \bar{X}_n , t.j., odhadu neznámeho parametru strednej hodnoty μ_X . Nás ale zaujíma iný parameter, parameter θ_X , ktorý ale lze jednoducho vyjadriť pomocou μ_X .

Pripomeňme vzťah $\theta_X = \mu_X / (\mu_X - 1)$. Príslušná transformácia, ktorá prevedie parameter μ_X na θ_X má tvar

$$h(x) = \frac{x}{x-1}, \text{ pričom pre deriváciu zároveň platí } h'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Zároveň vieme, že pre transformovaný parameter, resp. jeho empirický odhad (v zmysle obecnej transformácie h) môžeme vyjadriť asymptotické rozdelenie odhadu transformovaného parametru pomocou vzťahu (t.j., aproximácia Taylorovým rozvojom, resp. tzv. delta metóda)

$$\sqrt{n}(h(\bar{X}_n) - h(\mu_X)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_X^2 \cdot [h'(\mu_X)]^2), \quad \text{opäť pre } n \rightarrow \infty.$$

Jednoduchým dostadením dostaneme, že $h(\mu_X) = \theta_X$ a tiež

$$|h'(\mu_X)| = \frac{1}{(\mu_X - 1)^2} = (\theta_X - 1)^2.$$

Z nápovedy v zadaní zároveň vieme, že

$$\sigma_X^2 = \text{var } X_i = \frac{\theta_X}{(\theta_X - 1)^2(\theta_X - 2)}.$$

Dohromady dostaneme, že asymptotické rozdelenie momentového odhadu $\tilde{\theta}_n$ je

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \underbrace{\frac{\theta_X(\theta_X - 1)^2}{\theta_X - 2}}_{\sigma_{MM}^2}\right), \quad \text{pre } n \rightarrow \infty.$$

- A2.** [Procvičovací] Metódou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu z předchozího příkladu. Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$ a porovnejte asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu $\hat{\theta}_n$ a momentového odhadu $\tilde{\theta}_n$.

Řešení:

Opäť nás zaujíma odhad toho istého parametru $\theta_X > 2$, ale príslušný odhad chceme zostrojiť tentokrát pomocou metódy maximálnej vierohodnosti. Vierohodnostná funkcia pre Paretovo rozdelenie a náhodný výber X_1, \dots, X_n z tohto rozdelenia, je daná predpisom

$$L(\theta_X, \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta_X}{X_i^{\theta_X+1}} \cdot \mathbb{I}_{\{(1, \infty)\}}(X_i) = \theta_X^n \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{-(\theta_X+1)},$$

pričom sa jedná o funkciu neznámeho parametru θ_X (t.j., združená hustota $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ vyčíslená v realizovanom náhodnom výbere X_1, \dots, X_n). Príslušnú logaritmickú vierohodnosť získame logaritmovaním

$$l(\theta_X, \mathbf{X}) = \log \left(L(\theta_X, \mathbf{X}) \right) = n \log \theta_X - (\theta_X + 1) \sum_{i=1}^n \log X_i$$

a skórovú funkciu získame derivovaním logaritmickkej vierohodnosti podľa argumentu θ_X , teda

$$U(\theta_X, \mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial \theta_X} l(\theta_X, \mathbf{X}) = \frac{n}{\theta_X} - \sum_{i=1}^n \log X_i.$$

Odhad metódou maximálnej vierohodnosti získame tak, že skórovú rovnicu položíme rovnú hodnote nula a hľadáme riešenie vzhľadom k $\theta > 2$. To znamená, že riešime rovnicu

$$\frac{n}{\theta_X} - \sum_{i=1}^n \log X_i = 0,$$

ktorej explicitné riešenie (a zároveň maximálne vierohodný odhad) je v tvare

$$\hat{\theta}_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i \right)^{-1}.$$

K overeniu, že sa naozaj jedná o maximum (a nie napr. lokálne minimum), je potrebné overiť, že v danom bode je funkcia konkávná. Zároveň potrebujeme spočítať asymptotické rozdelenie odhadu $\hat{\theta}_n$, ktoré je dané predpisom

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \mathbf{I}^{-1}(\theta_X)), \quad \text{pre } n \rightarrow \infty,$$

kde $\mathbf{I}(\theta_X)$ je Fisherova informácia o neznámom parametre θ_X obsažená v náhodnej veličine X_i . Fisherová informácia o parametre θ_X obsažená v celom náhodnom výbere X_1, \dots, X_n je definovaná výrazom

$$\mathbf{I}_n(\theta_X) = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_X^2} l(\theta_X, \mathbf{X}) \right] = -E \left[\frac{\partial}{\partial \theta_X} U(\theta_X, \mathbf{X}) \right] = -E \left[\frac{-n}{\theta_X^2} \right] = \frac{n}{\theta_X^2}.$$

Zároveň vidíme, že druhá derivácia logaritmickej vierohodnosti je záporná a teda naozaj sa jedná o maximum. Taktiež platí (pretože náhodné veličiny X_1, \dots, X_n sú nezávislé), že

$$\mathbf{I}_n(\theta_X) = n \cdot \mathbf{I}(\theta_X).$$

Dosadením dostaneme, že asymptotické rozdelenie maximálne vierohodného odhadu $\hat{\theta}_n$, neznámeho parametre $\theta_X > 1$ je

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \underbrace{\theta_X^2}_{\sigma_{ML}^2}), \quad \text{opäť pre } n \rightarrow \infty.$$

Nakoniec chceme porovnať asymptotické rozptyly oboch odhadov. Jednoduchou úpravou dostaneme, že

$$\sigma_{MM}^2 = \frac{\theta_X(\theta_X - 1)^2}{\theta_X - 2} = \theta_X^2 \cdot \frac{\theta_X^2 - 2\theta_X + 1}{\theta_X^2 - 2\theta_X} > \theta_X^2 = \sigma_{ML}^2.$$

A3. [Procvičovací] Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametre θ v modelu \mathcal{F} , kde

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{1-\theta} x^{(2\theta-1)/(1-\theta)} \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta \in (0, 1).$$

Určete asymptotické rozdění $\hat{\theta}_n$.

Řešení:

Vierohodnostná funkcia je daná predpisom

$$L(\theta, \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n f(X_i|\theta) = \left(\frac{\theta}{1-\theta} \right)^n \cdot \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}.$$

Opäť sa jedná o funkciu argumentu $\theta \in (0, 1)$, vyhodnotenú v náhodnom výbere $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Príslušná logaritmická vierohodnosť má tvar

$$l(\theta, \mathbf{X}) = \log(L(\theta, \mathbf{X})) = n[\log \theta - \log(1 - \theta)] + \frac{2\theta - 1}{1 - \theta} \sum_{i=1}^n \log X_i.$$

Skórovú funkciu získame derivovaním logaritmickkej vierohodnosti podľa argumentu θ , teda

$$U(\theta, \mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta, \mathbf{X}) = \frac{n}{\theta} + \frac{n}{1 - \theta} + \frac{1}{(1 - \theta)^2} \sum_{i=1}^n \log X_i := 0.$$

Riešením skórovej rovnice (ktorú sme položili rovnú hodnote nula) je maximálne vierohodný odhad:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\theta(1 - \theta)} + \frac{1}{(1 - \theta)^2} \sum_{i=1}^n \log X_i &= 0 \\ (1 - \theta) + \theta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i &= 0 \\ \theta \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i\right) &= 1 \\ \hat{\theta}_n &= \frac{1}{1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i}. \end{aligned}$$

Opäť je nutné overiť, že sa jedná o maximálne vierohodný odhad (maximum) – resp. že vierohodnostná funkcia je konkávna. Urobíme to v rámci výpočtu Fisherovej informácie nutnej k asymptotickému rozdeleniu.

Pre Fisherovu informáciu $\mathbf{I}_n(\theta)$ o parametre θ obsaženou v náhodnom výbere X_1, \dots, X_n platí, že

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n(\theta) &= -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\theta, \mathbf{X})\right] = -E\left[\frac{\partial}{\partial \theta} U(\theta, \mathbf{X})\right] = -E\left[\frac{-n}{\theta^2} + \frac{n}{(1 - \theta)^2} + \frac{2}{(1 - \theta)^3} \sum_{i=1}^n \log X_i\right] \\ &= \frac{n}{\theta^2} - \frac{n}{(1 - \theta)^2} - \frac{2}{(1 - \theta)^3} \sum_{i=1}^n E[\log X_i]. \end{aligned} \quad (1)$$

Zostáva spočítať strednú hodnotu $E[\log X_i]$, k čomu využijeme vhodnú transformáciu. Definujme náhodnú veličinu Z_i pomocou transformácie t , ako $Z_i = t(X_i) = -\log X_i$, pre $i = 1, \dots, n$. Inverzná transformácia t^{-1} je definovaná ako $X_i = t^{-1}(Z_i) = e^{-Z_i}$.

Keďže pre hustotu transformovanej náhodnej veličiny platí, že

$$f_Z(z) = f_X(t^{-1}(z)) \cdot |(t^{-1})'(z)|,$$

kde f_Z a f_X sú hustoty náhodných veličín Z a X , tak po dosadení získame hustotu náhodnej veličiny $Z_i = -\log X_i$ v tvare

$$f_Z(z) = \frac{\theta}{1 - \theta} e^{-z \frac{2\theta - 1}{1 - \theta}} = \frac{\theta}{1 - \theta} e^{-z \frac{\theta}{1 - \theta}}, \quad \text{pre } \theta \in (0, 1),$$

čo je vlastne hustota náhodnej veličiny s exponenciálnym rozdelením s parametrom $\lambda = \frac{\theta}{1 - \theta} > 0$ (to znamená, že $EZ_i = \frac{1 - \theta}{\theta}$). Po dosadení do Fisherovej informácie $\mathbf{I}_n(\theta)$ v (1) dostaneme

$$\mathbf{I}_n(\theta) = \frac{1}{\theta^2(1 - \theta)^2}.$$

Asymptotické rozdelenie maximálne vierohodného odhadu je preto

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \underbrace{\theta^2(1 - \theta)^2}_{\sigma_{ML}^2}\right), \quad \text{pre } n \rightarrow \infty.$$

- A4.** [Procvičovaci] Momentovou metodou najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu z předchozího příkladu. Určete asymptotické rozdělení $\tilde{\theta}_n$ a porovnejte asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu $\hat{\theta}_n$ a momentového odhadu $\tilde{\theta}_n$.

Řešení:

Je dobré si uvědomit, že v předcházejícím příkladě se jedná o hustotu Beta rozdělení, které má parametry $\alpha = \frac{2\theta-1}{1-\theta} + 1 = \frac{\theta}{1-\theta}$ a $\beta = 1$. Obecně totiž pro beta rozdělení s parametry $\alpha, \beta > 1$ platí, že hustota má tvar

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad \text{pre } x \in (0, 1)$$

a středná hodnota a rozptyl sú určené vzťahmi

$$EX_i = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{a} \quad \text{var } X_i = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

Po dosadení dostaneme

$$EX_i = \frac{\frac{\theta}{1-\theta}}{\frac{\theta}{1-\theta} + 1} = \theta$$

a tiež

$$\text{var } X_i = \frac{\frac{\theta}{1-\theta}}{\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^2 \left(\frac{1}{1-\theta} + 1\right)} = \frac{\theta(1-\theta)^2}{2-\theta}.$$

Na základe vzťahu pre strednú hodnotu je zřejmé, že momentový odhad pre parameter $\theta \in (0, 1)$ je samotný výberový priemer \bar{X}_n (t.j., $\tilde{\theta}_n = \bar{X}_n$). Na základe centrálné limitnej vety získame hneď asymptotické rozdělení, ktoré je dané vzťahom

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \underbrace{\frac{\theta(1-\theta)^2}{2-\theta}}_{\sigma_{MM}^2}\right).$$

Na záver chceme porovnať asymptotický rozptyl maximálne věrohodného odhadu $\hat{\theta}_n$ s asymptotickým rozptylom momentového odhadu $\tilde{\theta}_n$.

$$\sigma_{MM}^2 = \frac{\theta(1-\theta)^2}{2-\theta} = \theta^2(1-\theta)^2 \cdot \frac{1}{\theta(2-\theta)} > \theta^2(1-\theta)^2 = \sigma_{ML}^2,$$

pretože funkcia $g(\theta) = \theta(2-\theta)$ je rastúca na intervale $(0, 1)$ (derivácia $g'(\theta) = 2 - 2\theta = 2(1-\theta)$ je kladná pre všetky $\theta \in (0, 1)$) a zároveň platí, že $g(0) = 0$ a $g(1) = 1$. Preto platí, že $\frac{1}{g(\theta)} > 1$ pre všetky $\theta \in (0, 1)$.

Pre malé hodnoty $\theta \in (0, 1)$ je momentový odhad dokonca hodne špatny (príliš veľká variabilita), pretože $\frac{1}{g(\theta)} \rightarrow \infty$ pre $\theta \rightarrow_+ 0$.

B Výsledky

$$\mathbf{B1.} \quad \hat{\theta}_n = \frac{-(2n + \sum_{i=1}^n \log X_i) + \sqrt{(2n + \sum_{i=1}^n \log X_i)^2 - 4n \sum_{i=1}^n \log X_i}}{2 \sum_{i=1}^n \log X_i}, \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_X) \stackrel{as.}{\sim} N\left(0, \frac{\theta_X^2 (\theta_X + 1)^2}{2\theta_X^2 + 2\theta_X + 1}\right)$$

$$\mathbf{B2.} \quad \tilde{\theta}_n = \frac{2\bar{X}_n}{1 - \bar{X}_n}, \quad \sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta_X) \stackrel{as.}{\sim} N\left(0, \frac{\theta_X (\theta_X + 2)^2}{2(\theta_X + 3)}\right)$$

$$\mathbf{B3.} \quad \hat{\theta}_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}, \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_X) \stackrel{as.}{\sim} N\left(0, \frac{\theta_X^2}{4}\right)$$

$$\mathbf{B4.} \quad \text{Použitím } EX_i^2 = \theta_X^2, \text{ získáme momentový odhad } \tilde{\theta}_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2} \text{ a navíc platí i } \sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta_X) \stackrel{as.}{\sim} N\left(0, \frac{\theta_X^2}{4}\right). \text{ Lze spočíst i přímo, ze vztahu } EX_i = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta.$$

$$\mathbf{B5.} \quad \hat{\theta}_n = \frac{-\sum_{i=1}^n X_i + \sqrt{(\sum_{i=1}^n X_i)^2 + 4n \sum_{i=1}^n X_i^2}}{2n}, \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_X) \stackrel{as.}{\sim} N(0, \theta_X^2/3)$$

$$\mathbf{B6.} \quad \hat{\theta}_n = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2}, \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_X) \stackrel{as.}{\sim} (0, \theta_X^2/4)$$

$$\mathbf{B7.} \quad \hat{\theta}_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - 1)^2}{X_i}\right)^{-1}, \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_X) \stackrel{as.}{\sim} N(0, 2\theta_X^2)$$

$$\mathbf{B8.} \quad \hat{\theta}_n = \bar{X}_n, \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_X) \stackrel{as.}{\sim} N(0, \theta_X^3/2)$$

$$\mathbf{B9.} \quad \hat{\theta}_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}\right)^{-1}, \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_X) \stackrel{as.}{\sim} N(0, \theta_X^2)$$