NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Metoda maximální věrohodnosti a momentová metoda.

Teoretické cvičenie #4 | Zimní semestr 2024/2025

Nech $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výber z rozdelenia s hustotou $f_\theta(x)$ (vzhľadom k Lebesgueovej miere, alebo vzhľadom k čítacej miere), ktorá závisí na neznámom parametri $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ (prípadne na mnohorozmernom parametri $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^p$, pre nejaké $p \in \mathbb{N}$). Vierohodnostná funkcia (funkcia neznámeho parametru $\theta \in \Theta$) je definovaná ako

$$L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i), \qquad \text{pre } \theta \in \Theta$$

a v stručnosti sa často označuje aj ako $L(\theta, \mathbb{X})$, kde $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$. Logaritmická vierohodnostná funkcia je potom definovaná ako

$$l(\theta, X_1, \dots, X_n) = l(\theta, \mathbb{X}) = \log L(\theta, \mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{n} \log \Big(f_\theta(X_i) \Big).$$

Odhad neznámeho parametru $\theta \in \Theta$ pomocou metódy maximálnej vierohodnosti je definovaný ako

$$\widehat{\theta}_n = Argmax_{\theta \in \Theta} \quad l(\theta, \mathbb{X})$$

a za predpokladov podmienok regularity platí, že

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \quad \underset{n \to \infty}{\overset{as}{\sim}} \quad N(0, I^{-1}(\theta)), \qquad \text{kde } I(\theta) = \frac{1}{n} E\left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\theta, \mathbb{X}) \right]$$

je tzv. Fisherová informace o parametru $\theta \in \Theta$, obsiahnutá v jednom porozovaní $X_i \sim f_\theta(x)$.

A Příklady na cvičení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x|\theta_X) \in \mathcal{F} = \{f(x|\theta),\ \theta \in \Theta\}$.

A1. Momentovou metodou najděte odhad $\widetilde{\theta}_n$ parametru $\theta_X > 2$ v modelu $\mathcal{F}$, kde

$$f(x|\theta_X) = \frac{\theta_X}{x^{\theta_X + 1}} \mathbb{I}_{(1,\infty)}(x), \qquad \text{(Paretovo rozdělení)}.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widetilde{\theta}_n$.
[Použijte vztahy $\mathsf{E}\, X_i = \frac{\theta_X}{\theta_X - 1}$, $\mathsf{var}\, X_i = \frac{\theta_X}{(\theta_X - 1)^2(\theta_X - 2)}$.]

A2. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu z předchozího příkladu. Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$ a porovnejte asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu $\widehat{\theta}_n$ a momentového odhadu $\widetilde{\theta}_n$.

A3. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu $\mathcal{F}$, kde

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{1 - \theta} x^{(2\theta - 1)/(1 - \theta)} \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta \in (0, 1).$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

A4. Momentovou metodou najděte odhad $\widetilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu z předchozího příkladu. Určete asymptotické rozdělení $\widetilde{\theta}_n$ a porovnejte asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu $\widehat{\theta}_n$ a momentového odhadu $\widetilde{\theta}_n$.

B Doplňující příklady (nahrazování, procvičování)

Z následujúcich príkladov je potrebné samostatne spočítať **aspoň tři** príklady (podľa vlastného výberu) a riešenie zaslať emailom na adresu cvičiaceho (`[hlavka,maciak]@karlin.mff.cuni.cz`), prípadne doručiť osobne na začiatku piateho cvičenia.

V nasleduúcich príkladoch obecně předpokládame, že $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x|\theta_X) \in \mathcal{F} = \{f(x|\theta),\ \theta \in \Theta\}$.

B1. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x;\theta) = \theta(\theta+1)x^{\theta-1}(1-x)1_{(0,1)}(x), \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

B2. Momentovou metodou najděte odhad $\widetilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu $\mathcal{F}$, kde

$$f(x;\theta) = \theta(\theta+1)x^{\theta-1}(1-x)1_{(0,1)}(x), \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widetilde{\theta}_n$.

B3. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2}\exp\Big\{-\Big(\frac{x}{\theta}\Big)^2\Big\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

B4. Momentovou metodou najděte odhad $\widetilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu $\mathcal{F}$, kde

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2}\exp\Big\{-\Big(\frac{x}{\theta}\Big)^2\Big\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widetilde{\theta}_n$.

B5. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\exp\Big\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}\Big\}, \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

B6. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \frac{x}{\theta^2}\exp\Big\{-\frac{x^2}{2\theta^2}\Big\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0 \qquad \text{(Rayleighovo rozdělení)}.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.
[Použijte vztah $\mathsf{E}\, X_i^2 = 2\theta_X^2$.]

B7. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi x^3}}\exp\Big\{-\frac{\theta(x-1)^2}{2x}\Big\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

B8. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi x^3}}\exp\Big\{-\frac{(x-\theta)^2}{\theta^2 x}\Big\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

B9. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^2}\exp\Big\{-\frac{\theta}{x}\Big\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.