DÚ 4:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{c_0}{1} & + & \frac{c_0}{2} & + & \frac{c_0}{3} & + & \frac{c_0}{4} & + & \cdots \\
\frac{c_1}{2} & + & \frac{c_1}{3} & + & \frac{c_1}{4} & + & \frac{c_1}{5} & + & \cdots \\
\frac{c_2}{3} & + & \frac{c_2}{4} & + & \frac{c_2}{5} & + & \frac{c_2}{6} & + & \cdots \\
\frac{c_3}{4} & + & \frac{c_3}{5} & + & \frac{c_3}{6} & & \frac{c_3}{7} & + & \cdots
\end{array}
\qquad O\left(\frac{s^2}{n}\right)
$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_0}{n} + \cdots + \frac{c_s}{n+s} \right), \qquad c_0 + c_1 + \cdots + c_s = 0$$

def. operátor posunutí $\quad P\{a_n\} = \{a_{n+1}\}$

$$q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_s x^s$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q(P) \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

když $\quad c_0 + c_1 + \cdots + c_s = 0 \implies q(1) = 0$

$$\implies q(x) = (x-1)\,\tilde{q}(x)$$

$$Ř = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}(P)\,(P-I) \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

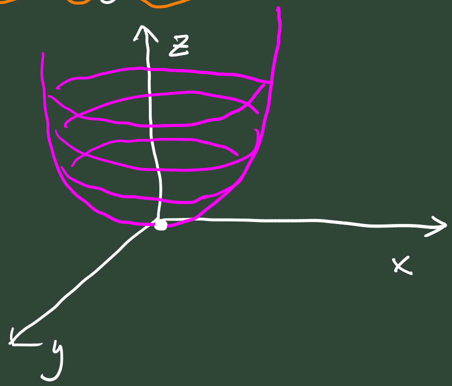
$$b_n := \tilde{q}(P)\left\{\frac{1}{n}\right\}$$

$$\to \quad R' = \sum_{n=1}^{\infty} (P - I)\{b_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_{n+1} - b_n \right) = -b_1$$

Funkce dvou (a více) proměnných

$$f(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

graf:



$$D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Otázka:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{?}{=} 0$$

Def: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

kde $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ = Euklidovská norma

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \overset{?}{=} 0$$

$\iff$ Nechť $\varepsilon > 0$, platí, že $\left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$?

pro dosti malá $\sqrt{x^2+y^2}$

:

$$x^4+y^4 \le x^4+2x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2$$

$$\to \quad |f(x,y)| \le \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$= \|(x,y)\|^2$$

Takže když $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, $\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow \|(x,y)\|^2 < \varepsilon$

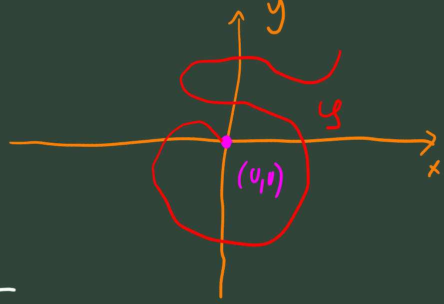
$$\Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$$

Takže $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \iff \lim_{R\to 0^+}\left(\sup_{\substack{\|(x,y)\| < R \\ (x,y)\neq 0}} |f(x,y) - L|\right) = 0}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{2xy}{x^2+y^2}}_{f(x,y)} = ?$$



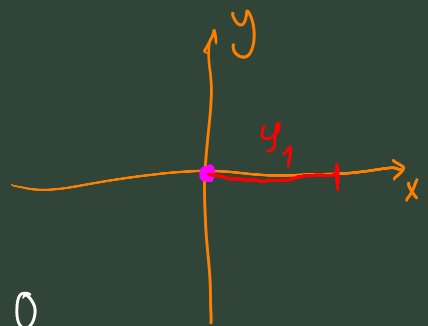
Z věty o limitě slož. fce platí:

Pokud $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$

a $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}^2$ je křivka splňující $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = (0,0)$

a $\varphi(t) \neq (0,0)$ pro $\forall\, t \in (0,1)$ pak platí

$$\lim_{t\to 0^+} f\circ\varphi(t) = L$$



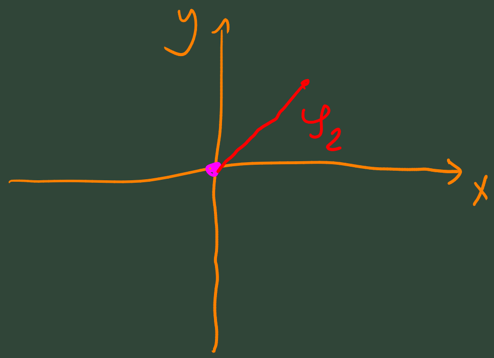
i) volba $\varphi_1(t) = (t,0)$

Počítejme

$$\lim_{t\to 0^+} f(t,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\cdot 0}{\underbrace{t^2+0^2}_{0}} = 0$$

$\Rightarrow$ pokud L existuje, pak $L = 0$

ii) volba $\varphi_2(t) = (t,t)$



Počítejme

$$\lim_{t\to 0^+} f(t,t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t\cdot t}{t^2+t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} 1 = 1$$

Pokud L existuje, pak $L = 1$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad \text{neexistuje !}$$

Obecněji si můžu zvolit $\psi(t) = (at, t)$, $a \in \mathbb{R}$ parametry

Dostanu:

$$\lim_{t\to 0} f(at,t) = \frac{2at^2}{a^2t^2+t^2} = \frac{2a}{a^2+1}$$ ← libovolná hodnota mezi -1 a 1

$\boxed{5}$ $$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{(x^2+y^2)^{x^2y^2}}_{f(x,y)} = \; ?$$

$$D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Předpokládejme, že L existuje vlastní

Pak

$$L = \lim_{t\to 0^+} f(t,0) = \lim_{t\to 0^+} \underbrace{(t^2)^0}_{1} = 1$$

Pak

$$L = \lim_{t\to 0^+} f(t,t) = \lim_{t\to 0^+} (2t^2)^{t^4} = \lim_{t\to 0^+} \exp\left(\ln(2t^2)\cdot t^4\right)$$

$$\overset{\text{VOLSF}}{=} \exp(0) = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} \overset{?}{=} 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \exp\left(\ln(x^2+y^2)\cdot x^2y^2\right) \overset{?}{=} 1$$

Z VOLSF stačí dokázat (spojitost exp)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = 0$$

Stačí dokázat

$$\sup_{\substack{(x,y)\neq 0 \\ \|(x,y)\|<R}} \left| x^2y^2\ln(x^2+y^2) \right| \xrightarrow{R\to 0^+} 0$$

Platí:

$$\left| x^2y^2 \ln(x^2+y^2) \right| \underbrace{\leq}_{(2|xy| \leq x^2+y^2)} \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 \ln(x^2+y^2) \underset{x^2+y^2 \leq R^2}{\leq}$$

$$\leq 2 \frac{R^4}{4} \ln R \xrightarrow{R \to 0^+} 0$$

Takže skutečně

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1$$

Přestávka: 10 min

(Pokračování v 12:55)

$\boxed{11}$ $$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = ?$ 0

ii) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = ?$ 0

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y) = ?$ neexistuje

Ad i)

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

$D(f) = ?$

$$\left(x^2y^2 + (x-y)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y \;\&\; xy = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = 0 \right)$$

$$D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \right) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

Ad ii) analogické

Ad iii) $\varphi(t) = \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \lim_{t \to 0^+} f(at, bt) = \lim_{t \to 0^+} \frac{ab\,t^4}{ab\,t^4 + (a-b)^2 t^2} =$$

$$\overset{a=b}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{a^2}{a^2 + 0} = 1$$

$$\overset{a=0,\, b\neq 0}{=} 0$$

limita neexistuje

Parciální derivace & tot. diferenciál

$f(x,y)$ ... derivace ?

Připomenutí v $\mathbb{R}^1$ $\quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

i) parc. derivace $\quad \partial_x f, \ \partial_y f$

(jako v $\mathbb{R}^1$, druhou proměnnou zafixuji)

ii) tot. diferenciál $\quad df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

lineární zobrazení takové, že platí:

$$f(x+dx, y+dy) = f(x,y) + df_{(x,y)}(dx,dy) + o\big(\underbrace{\|(dx,dy)\|}_{\sqrt{dx^2+dy^2}}\big)$$

Platí 2 důležité vztahy mezi definicí i) & ii):

I) existuje-li $df_{(x,y)}$, pak existují $\partial_x f, \partial_y f$ v bodě (x,y)

a

$$df_{(x,y)}(dx,dy) = \partial_x f \cdot dx + \partial_y f \cdot dy$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

II) je-li $\mathcal{U}$ otevřená množina a $\partial_x f, \partial_y f \in C(\mathcal{U})$

potom df existuje v $\mathcal{U}$

Př. $\boxed{8}$ $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

vyšetřete $\partial_x f, \partial_y f, df$

$$\left.\begin{aligned} \bullet\ \partial_x f(x,y) &= 4x^3 + 0 - 8xy^2 \\ &= 4x(x^2 - 2y^2) \\ \bullet\ \partial_y f(x,y) &= 0 + 4y^3 - 8x^2y \\ &= 4y(y^2 - 2x^2) \end{aligned}\right\} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

: $\partial_x f, \partial_y f$ jsou $C(\mathbb{R}^2)$

$\rightarrow$ df existuje $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ a platí

$$\boxed{df_{(x,y)}(dx, dy) = 4x(x^2 - 2y^2) \cdot dx + 4y(y^2 - 2x^2) \cdot dy, \quad dx, dy \in \mathbb{R}}$$

Význam: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} x' = x + dx \\ y' = y + dy \end{pmatrix}$

$l(x',y') = f(x,y) + df_{(x,y)}(x'-x,\ y'-y)$ je

nejlepší lineární aproximace fce $f(x',y')$ na okolí

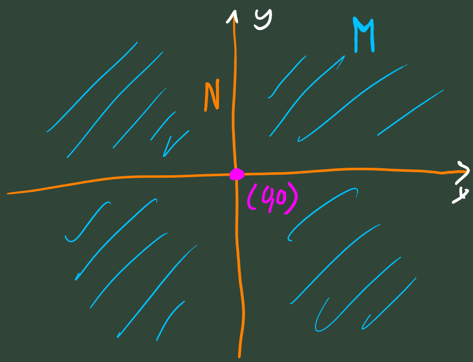
bodu (x,y). (je to tečná rovina)

$\boxed{3}$ $f(x,y) = |xy|$

Γ

- f spojitá na $\mathbb{R}^2$
- Pro $(x,y) \in M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$

spojité na M $\left\{ \begin{aligned} \partial_x f &= (\operatorname{sgn} x)\, |y| \\ \partial_y f &= (\operatorname{sgn} y)\, |x| \end{aligned} \right.$



$\Rightarrow$ $df_{(x,y)}(dx,dy) = (\operatorname{sgn} x)|y|\,dx + (\operatorname{sgn} y)|x|\,dy$, $\forall (x,y) \in M$

Nechť $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ XOR } y = 0\}$

- $\forall (x,y) \in N$: $\partial_x f$ nebo $\partial_y f$ neexistuje

(přesněji $x = 0 \Rightarrow$ $\partial_x f$ neexistuje, $\partial_y f = 0$ a vice versa)

$\rightarrow$ df neexistuje v N

- $(x,y) = 0$

Potom $f(dx, dy) = |dx\, dy| \leq \frac{1}{2}(dx^2 + dy^2) = o\left(\sqrt{dx^2 + dy^2}\right)$

$\Longrightarrow$ $df_{(0,0)} = 0$

$\Longrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$