Lineární diferenciální rovnice (s k.k.)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = f(x)$$

kde $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, f fce (spojitá)

Jak se to řeší?

A) Vyřeším homogenní rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$$

$\to$ FS (fundamentální systém) : $u_1, \dots, u_n$

B) Najdu partikulární řešení

- uhádnu
- variace konst
- využiju speciální substituci

$\to$ y_p řešící rovnici

C) obecné řešení má tvar:

$$y = y_p + \sum_{k=1}^{n} C_k u_k$$

kde $C_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$

Ad A) $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$ (1)

def. charakteristický polynom: $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$

$\triangle$: (1) $\Leftrightarrow$ $\boxed{p\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0}$

$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{l} (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$ (rozklad polynomu)

($\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$)

(m_i = násobnost kořene λ_i)

$$\left[\prod_{j=l}^{l} \left(\frac{d}{dx} - \lambda_j\right)^{m_j}\right] y = 0$$

Stačí aby $\exists j$: $\boxed{\left(\frac{d}{dx} - \lambda_j\right)^{m_j} y = 0}$

Má m_j řešení:

$$0 \xleftarrow{\frac{d}{dx} - \lambda_j} e^{\lambda_j x} \xleftarrow{\frac{d}{dx} - \lambda_j} x e^{\lambda_j x} \xleftarrow{\frac{d}{dx} - \lambda_j} \frac{x^2}{2} e^{\lambda_j x} \longleftarrow$$

$$\cdots \longleftarrow \frac{x^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!} e^{\lambda_j x}$$

tj. m_j řešení (LN) $\Longrightarrow$ celkem $n = \sum_j m_j$ řešení (LN)

Může se stát, že $\lambda_j \notin \mathbb{R}$

$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ .... násobnost m_j

$\bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$ .... násobnost m_j

$$e^{\lambda_j x}, e^{\bar{\lambda}_j x} \longmapsto \frac{e^{\lambda_j x} + e^{\bar{\lambda}_j x}}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\frac{e^{\lambda_j x} - e^{\bar{\lambda}_j x}}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

takto se zbavím komplexních čísel (pokud chci)

1

$$y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

$$= (\lambda - 1)^3 \longrightarrow \text{kořen } \lambda = 1$$

FS: $e^x, \quad xe^x, \quad \frac{x^2}{2} e^x$

obecné reálné řešení: $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 \frac{x^2}{2} e^x, \; x \in \mathbb{R}$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

B) $$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = f(x)$$

Předpokládejme pro začátek f v následujícím tvaru

speciální pravé strany

i) f je polynom

ii) $f = e^{\alpha x} g(x)$, g je polynom

iii) $f = \cos \beta x \; g(x)$, g je polynom

iv) $f = \sin \beta x \; g(x)$, g je polynom

Ad i) partikulární řešení hledám ve tvaru polynomu

$y_p =$ polynom $\Rightarrow$ soustava rovnic pro koeficienty

Ad ii, iii, iv) Použiju speciální substituci:

$p\left(\frac{d}{dx}\right) y = e^{\alpha x} g$	$y \overset{\text{sub.}}{=} e^{\alpha x} z$	$p\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right) z = g$
$p\left(\frac{d}{dx}\right) y = \cos\beta x \, g$	$y \overset{\text{sub.}}{=} \operatorname{Re}\left(e^{i\beta x} z\right)$	$p\left(\frac{d}{dx} + i\beta\right) z = g$
$p\left(\frac{d}{dx}\right) y = \sin\beta x \, g$	$y \overset{\text{sub.}}{=} \operatorname{Im}\left(e^{i\beta x} z\right)$	$p\left(\frac{d}{dx} + i\beta\right) z = g$

8'

$$y'' - 2y' + y = e^x x$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

FS: $e^x, \quad xe^x$

$$p(\lambda+1) = (\lambda + 1 - 1)^2 = \lambda^2$$

sub.

$$y = e^x z$$

$\rightarrow$

$$z'' = x$$

$$z = \frac{x^3}{6}$$

$$y_p = \frac{x^3}{6} e^x$$

$\in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ obecné řešení: $y = \frac{x^3}{6} e^x + c_1 e^x + c_2 x e^x$

$p\left(\frac{d}{dx}\right) y = e^{\alpha x} g$	$y \overset{\text{sub.}}{=} e^{\alpha x} z$	$p\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right) z = g$
$p\left(\frac{d}{dx}\right) y = \cos \beta x \, g$	$y \overset{\text{sub.}}{=} \mathrm{Re}(e^{i\beta x} z)$	$p\left(\frac{d}{dx} + i\beta\right) z = g$
$p\left(\frac{d}{dx}\right) y = \sin \beta x \, g$	$y \overset{\text{sub.}}{=} \mathrm{Im}(e^{i\beta x} z)$	$p\left(\frac{d}{dx} + i\beta\right) z = g$

2)

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$$

$$\underline{y = C_1 \boxed{e^{3x}} + C_2 \boxed{e^{-x}} + \frac{1}{5} e^{4x}}$$

- $y_p = \alpha e^{4x} \rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$
- $y = e^{4x} z \rightarrow z'' + 6z' + 5z = 1$
  $\rightarrow z = \frac{1}{5}$

přestávka 10 min

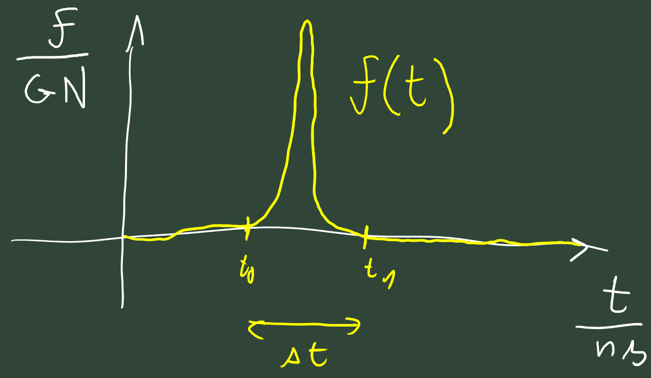
(pokračování 12:48)

Variace konstant - Fyzikální (de)motivace

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = f \qquad \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{array}$$

$\ddot{y}$: zrychlení; $\dot{y}$: rychlost; y: poloha; f: síla

Představme si f v tomto tvaru :



"impuls síly"

Tři časové intervaly :

i) $(0, t_0)$ ← umím řešit (homogenní)

ii) (t_0, t_1) ← budu aproximovat

iii) $(t_1, +\infty)$ ← umím řešit, budu-li znát $y(t_1)$, $y'(t_1)$

Ad i) řešení $y \equiv 0$

Ad ii) $$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = f$$

$$|\dot{y}| = \left|\int_{t_0}^{t} \ddot{y}\, dt\right| \leq \Delta t\, |\ddot{y}|_{max}$$

podobně $$|y| \leq \Delta t\, |\dot{y}|_{max}$$

rovnice je dominována členem $\ddot{y}, f$ zatímco $\dot{y}, y \approx 0$

$\rightarrow$ $$\ddot{y} = \frac{f}{a_2} \rightarrow \dot{y}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \ddot{y}\, dt = \Delta t \frac{\bar{f}}{a_2}$$

$$y(t_1) = 0$$

iii) $t \in (t_1, +\infty)$

FS

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2$$

$$y(t_0) = C_1 u_1(t_0) + C_2 u_2(t_0) = 0$$

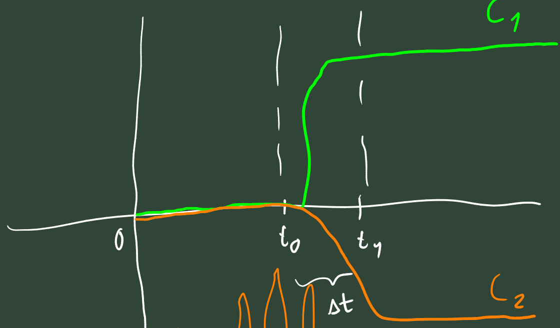
$$\dot{y}(t_0) = C_1 \dot{u}_1(t_0) + C_2 \dot{u}_2(t_0) = \Delta t \frac{f}{a_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ \dot{u}_1 & \dot{u}_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{t=t_0} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta t \frac{f}{a_2} \end{pmatrix}$$

Celkem tedy (mimo malý interval (t_0, t_1)) mám

$$y = \tilde{C}_1(x)\, u_1(x) + \tilde{C}_2(x)\, u_2(x)$$

kde $\hat{C}_i(x) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ C_i, & t > t_1 \end{cases}$



Obecný případ:

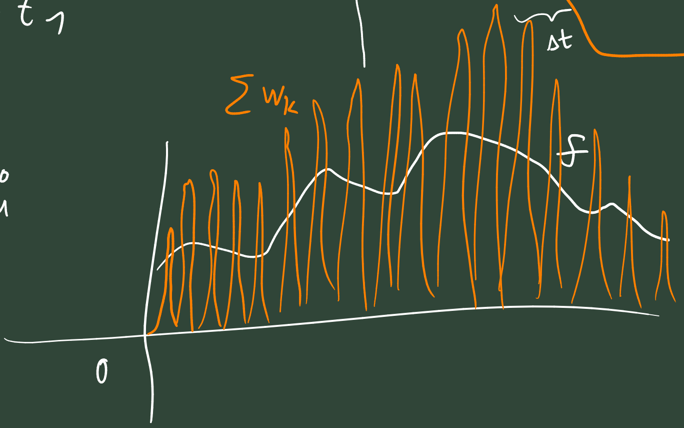
$$f \doteq \sum_{k=0}^{N} w_k$$

f složím z N impulzů

kde

$$w_k(t) = 0, \quad t \notin (t_k, t_{k+1})$$

$$\overline{w_k} = f(t_k)$$



→ řešení:

$$y = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x)$$

kde

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N} \Delta t \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ \dot{u}_1 & \dot{u}_2 \end{pmatrix}^{-1}\Bigg|_{t=t_k} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\overset{f(t_k)}{\overline{w_k}}}{a_2} \end{pmatrix} \chi(t > t_k)$$

$$\overset{\lim \Delta t \to 0}{=} \int_0^t \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ \dot{u}_1 & \dot{u}_2 \end{pmatrix}^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(s)}{a_2} \end{pmatrix} ds$$

9

$$y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\,x$$

A) $\lambda^2 + 4 = 0 \longrightarrow \lambda = 2i, -2i$

FS: $u_1 = \cos 2x,\ u_2 = \sin 2x$

B) hledám part. řešení

$$y_p = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x)$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2x, & \sin 2x \\ -2\sin 2x, & 2\cos 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,\mathrm{tg}\,x \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos 2x, & \sin 2x & 0 \\ -\sin 2x, & \cos 2x & \operatorname{tg} x \end{array}\right) \cdot \cos 2x \quad +(\mathrm{I}) \cdot \sin 2x$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos 2x, & \sin 2x & 0 \\ 0, & \underbrace{\cos^2 2x + \sin^2 2x}_{1} & \operatorname{tg} x \cos 2x \end{array}\right)$$

$$C_2' = \operatorname{tg} x \cos 2x, \qquad C_1' = -\operatorname{tg} x \sin 2x$$

$$C_1 = -\int \operatorname{tg} x \underbrace{\sin 2x}_{2\sin x \cos x} dx = -2\int \underbrace{\sin^2 x}_{\frac{1-\cos 2x}{2}} dx = \int (\cos 2x - 1)\, dx$$

$$\overset{c}{=} \frac{1}{2}\sin 2x - x$$

$$C_2 = \int \operatorname{tg} x \cos 2x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \end{array} \right| = -\int \frac{1}{u}\left(u^2 - (1-u^2)\right) du =$$

$$= -\int \left(2u - \frac{1}{u}\right) du \overset{c}{=} -u^2 + \ln|u| = -\cos^2 x + \ln|\cos x|$$

$$\longrightarrow \boxed{y(x) = \left(\frac{1}{2}\sin 2x - x + C_1\right)\cos 2x + \left(-\cos^2 x + \ln|\cos x| + C_2\right)\sin 2x}$$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + \pi\mathbb{Z}$

Eulerova ODR

je LDR s nekonst. koef. tvaru

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)} = f(x)}$$

$a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

Řešení homogenní soustavy $(f=0)$:

Ansatz: $y = x^\alpha$

$$\rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \, k! \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \, k! \binom{\alpha}{k} \cancel{x^\alpha} = 0$$

$\rightarrow$ algebraická rovnice pro α ($P(\alpha) = 0$, kde P je polynom stupně n)

- Vyšší násobnost kořene α $\longrightarrow$ přidám do FS $x^\alpha \ln x, \ldots, x^\alpha \frac{\ln^{m-1} x}{(m-1)!}$, kde m je násobnost kořene α

- komplexně sdružený pár $\lambda = \alpha + \beta i$
$\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$

$$x^{\alpha+\beta i} = x^{\alpha} \exp(\ln x \cdot \beta i) = x^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x)\right)$$

→ řešení:

$$x^{\alpha}\cos(\beta \ln x), \quad x^{\alpha}\cos(\beta \ln x)\ln x, \ldots, \quad x^{\alpha}\cos(\beta \ln x)\frac{\ln^{m-1} x}{(m-1)!}$$

Př.

10) $$x^2 y''' = 2y'$$

sub. $z = y'$

$$x^2 z'' = 2z$$

Ansatz: $z = x^{\alpha}$

$$\alpha(\alpha-1)\, x^2\, x^{\alpha-2} = 2x^{\alpha}$$

$$\alpha(\alpha-1) = 2$$

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \qquad \overset{-2 \cdot 1}{\vee}$$

$$(\alpha-2)(\alpha+1) = 0 \rightarrow \alpha = 2, -1$$

$$z = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} \rightarrow \boxed{y = C_1 \frac{x^3}{3} + C_2 \ln|x| + C_3}$$