Kritéria pro absolutní konvergenci

Buďte $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$ a f reálná funkce definovaná na (a, b). Jestliže (Newtonův) integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje a je konečný, říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje.

Jestliže existuje a je konečný integrál $\int_a^b |f(x)|\,dx$, pak říkáme, že příslušný integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje absolutně.

Jestliže integrál konverguje absolutně, potom konverguje.

Srovnávací kritérium. *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$ a f, g reálné funkce jedné reálné proměnné. Nechť f je spojitá v intervalu $[a, b)$, nechť $|f| \leq g$ na (a, b) a nechť konverguje $\int_a^b g$. Pak konvergují také integrály $\int_a^b f$, $\int_a^b |f|$.*

Analogické tvrzení platí pro intervaly tvaru $(a, b]$, kde $-\infty \leq a < +\infty$.

Limitní srovnávací kritérium. *Jsou-li funkce f, g spojité a nezáporné v intervalu $[a, b)$, kde $-\infty < a < b \leq +\infty$, potom platí:*

$$\text{je-li } \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = c, \text{ kde } c \in \mathbb{R},\ c \neq 0, \text{ pak}$$

$\int_a^b f$ konverguje, právě když $\int_a^b g$ konverguje.

Analogické tvrzení platí pro intervaly tvaru $(a, b]$, kde $-\infty \leq a < +\infty$.[1]

Kritéria pro neabsolutní konvergenci

Abelovo kritérium. *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$, nechť $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na $[a, b)$ a funkce $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ spojitá a monotónní.*

Pokud navíc $\int_a^b f$ konverguje a g je omezená v (a, b), pak také konverguje integrál $\int_a^b fg$.

Dirichletovo kritérium. *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$, nechť $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na $[a, b)$ a funkce $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ spojitá a monotónní.*

Pokud navíc f má omezenou primitivní funkci v (a, b) a $\lim x \to bg(x) = 0$, pak také konverguje integrál $\int_a^b fg$.

Bolzano–Cauchyova podmínka. Důkaz divergence

BC-podmínka.

BC-podmínka se někdy hodí pro důkaz divergence integrálu.

[1] Předpoklady lze zeslabit, ale pro praktické používání nám to postačí.

Důležité příklady – absolutní konvergence

Na příklady řešené zde se budeme v dalších úlohách odvolávat. Dobře je tedy promyslete, neboť jejich znalost a dobré pochopení je pro řešení dalších úloh esenciální.

Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálů!

Příklad 1 $\int_0^1 x^a \, dx$, *kde* $a \in \mathbb{R}$.

Návod: Protože integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Pro $a \neq -1$ je

$$\int x^a \, dx \stackrel{C}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

primitivní funkcí k funkci x^a na $(0,1)$, a tedy také zobecněnou primitivní funkcí na $[0,1]$. Odtud je zřejmé, že pro $a > -1$ integrál konverguje a pro $a < -1$ diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nule zprava existuje, ale není konečná).

Pro $a = -1$ je

$$\int \frac{1}{x} \, dx \stackrel{C}{=} \ln x$$

primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(0,1)$,[2] a tedy také zobecněnou primitivní funkcí na $[0,1]$. Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nule zprava existuje, ale není konečná).

Závěr: Konverguje (absolutně) pro $a > -1$.

Příklad 2 $\int_1^{+\infty} x^a \, dx$, *kde* $a \in \mathbb{R}$

Návod: Protože integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Pro $a \neq -1$ je

$$\int x^a \, dx \stackrel{C}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

primitivní funkcí k funkci x^a na $(1,+\infty)$, a tedy také zobecněnou primitivní funkcí. Odtud je zřejmé, že pro $a < -1$ integrál konverguje a pro $a > -1$ diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nekonečnu existuje, ale není konečná).

Pro $a = -1$ je

$$\int \frac{1}{x} \, dx \stackrel{C}{=} \ln x$$

primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(1,+\infty)$, a tedy také zobecněnou primitivní funkcí. Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje (neboť limita zobecněné primitivní funkce v nekonečnu existuje, ale není konečná).

Závěr: Konverguje (absolutně) pro $a < -1$.

[2]) proto nemusíme psát ve výsledku absolutní hodnotu

Příklad 3 *(a)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^b x}\, dx,\ a, b \in \mathbb{R}.$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^b x}\, dx,\ a, b \in \mathbb{R}.$

Návod: Protože integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

1. Nechť je nejprve $a > 1$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $a - \varepsilon > 1$ a platí, že

$$\frac{1}{x^a \ln^b x} = \frac{1}{x^{a-\varepsilon}} \cdot \frac{1}{x^\varepsilon \ln^b x} \leq \frac{1}{x^{a-\varepsilon}}$$

na nějakém intervalu $(M, +\infty)$. Konstanta M závisí na konkrétních hodnotách b, ε, ale existuje vždy neboť

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\varepsilon \ln^b x} = 0 \qquad \text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ a } b \in \mathbb{R},$$

a tudíž podle definice limity musí existovat okolí nekonečna, tedy interval $(M, +\infty)$ tak, že

$$\left|\frac{1}{x^\varepsilon \ln^b x}\right| = \frac{1}{x^\varepsilon \ln^b x} \leq 1.$$

Podle srovnávacího kritéria tedy v případě, že $a > 1$ a $b \in \mathbb{R}$ oba integrály konvergují (absolutně).

2. Nechť je nyní $a < 1$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $a + \varepsilon < 1$ a platí, že

$$\frac{1}{x^a \ln^b x} = \frac{1}{x^{a+\varepsilon}} \cdot \frac{x^\varepsilon}{\ln^b x} \geq \frac{1}{x^{a+\varepsilon}}$$

na nějakém intervalu $(M', +\infty)$. Konstanta M' závisí na konkrétních hodnotách b, ε, ale existuje vždy neboť

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\varepsilon}{\ln^b x} = +\infty \qquad \text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ a } b \in \mathbb{R},$$

a tudíž podle definice limity musí existovat okolí nekonečna, tedy interval $(M', +\infty)$ tak, že

$$\frac{x^\varepsilon}{\ln^b x} \geq 1.$$

Podle srovnávacího kritéria tedy v případě, že $a < 1$ a $b \in \mathbb{R}$ oba integrály divergují.

3. Nechť $a = 1$. Použijeme substituci $t = \ln x$ a dostaneme tak ekvivalentní integrály

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln^b x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^b}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^b x}\, dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^b}$$

O prvním integrálu víme z předchozích dvou příkladů, že diverguje pro každé $b \in \mathbb{R}$.

O druhém integrálu víme z předchozích dvou příkladů, že konverguje pro $b > 1$ a diverguje v jiném případě.

Závěr: Integrál (a) konverguje (absolutně) pro $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$, jinak diverguje. Integrál (b) konverguje (absolutně) pro $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$ a pro $a = 1$, $b > 1$, jinak diverguje.

Příklad 4 *(a)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{bx}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a e^{bx}\,dx$

Návod: Protože integrand je kladný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Případ $a = b = 0$ je triviální, oba integrály divergují.

Pro $a = 0$ a $b \neq 0$ platí, že

$$\int e^{bx}\,dx \overset{c}{=} \frac{1}{b}e^{bx}$$

a tudíž pro $a = 0$, $b > 0$ integrály divergují a pro $a = 0$ a $b < 0$ integrály konvergují.

Nyní bychom mohli provést substituci $t = e^x$, potom bychom dostali ekvivalentní integrály

$$\int_0^{+\infty} x^a e^{bx}\,dx = \int_1^{+\infty} \ln^a t\, t^{b-1}\,dt$$
$$\int_1^{+\infty} x^a e^{bx}\,dx = \int_e^{+\infty} \ln^a t\, t^{b-1}\,dt$$

o kterých víme z předchozího příkladu, že konvergují (absolutně) pro $b - 1 < -1$, tedy pro $b < 0$ a v případě (b) navíc pro $b = 0$ a $a < -1$.

Ukážeme ještě postup analogický postupu v předchozím příkladu.

1. Nechť je nejprve $b > 0$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $b - \varepsilon > 0$ a platí, že

$$x^a e^{bx} = (x^a e^{\varepsilon x})\, e^{(b-\varepsilon)x} \geq e^{(b-\varepsilon)x}$$

na nějakém intervalu $(M, +\infty)$. Konstanta M závisí na konkrétních hodnotách b, ε, ale existuje vždy neboť

$$\lim_{x\to\infty} x^a e^{\varepsilon x} = +\infty \qquad \text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ a } b \in \mathbb{R},$$

a tudíž podle definice limity musí existovat okolí nekonečna, tedy interval $(M, +\infty)$ tak, že

$$x^a e^{\varepsilon x} \geq 1.$$

Podle srovnávacího kritéria (viz výsledek pro $a = 0$, $b > 0$) tedy v případě, že $a \in \mathbb{R}$ a $b > 0$ oba integrály divergují.

2. Nechť je nyní $b < 0$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $b + \varepsilon < 0$ a platí, že

$$x^a e^{bx} = \frac{x^a}{e^{\varepsilon x}}\, e^{(b+\varepsilon)x} \leq e^{(b+\varepsilon)x}$$

na nějakém intervalu $(M', +\infty)$. Konstanta M' závisí na konkrétních hodnotách b, ε, ale existuje vždy neboť

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^{\varepsilon x}} = 0 \qquad \text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ a } a \in \mathbb{R},$$

a tudíž podle definice limity musí existovat okolí nekonečna, tedy interval $(M', +\infty)$ tak, že

$$\frac{x^a}{e^{\varepsilon x}} \leq 1.$$

Podle srovnávacího kritéria tedy v případě, že $a \in \mathbb{R}$ a $b < 0$ oba integrály (absolutně) konvergují.

3. Pokud $b = 0$, pak víme z předchozího příkladu, že integrál (a) diverguje vždy a integrál (b) konverguje pro $a < -1$.

Příklad 5 *(a)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^a}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$, *(b)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^a}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$.

Upozornění: *chování sinu a kosinu na okolí nuly je podstatným způsobem jiné!*

Návod: Uvědomme si, že oba integrandy na $(0,1) \subset (0, \pi/2)$ nemění znaménko a stačí tedy vyšetřovat absolutní konvergenci.

(a) Použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

a proto platí

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{\sin x}{x^a}}{\frac{x}{x^a}} = 1,$$

tudíž platí, že integrál (a) konverguje (absolutně), právě když konverguje integrál

$$\int_0^1 \frac{x}{x^a}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}}\,dx$$

o kterém víme, že konverguje (absolutně) pro $a - 1 < 1$, tudíž pro $a < 2$.

(b) Použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

a proto platí

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{\cos x}{x^a}}{\frac{1}{x^a}} = 1,$$

tudíž platí, že integrál (b) konverguje (absolutně), právě když konverguje integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$$

o kterém víme, že konverguje (absolutně) pro $a < 1$.

Důležité příklady – neabsolutní konvergence

Příklad 6 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\,dx$ *a* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a}\,dx$, *kde* $a \in \mathbb{R}$.

A na závěr trocha teorie.

Příklad 7 ***Absolutní a neabsolutní konvergence***

1. Ukažte, že pokud $\int_a^b f$ *konverguje absolutně a* $\int_b^c f$ *konverguje absolutně, pak* $\int_a^c f$ *konverguje absolutně.*

2. Ukažte, že pokud $\int_a^b f$ *konverguje absolutně a* $\int_b^c f$ *konverguje pouze neabsolutně, pak* $\int_a^c f$ *konverguje pouze neabsolutně.*

3. Ukažte, že pokud $\int_a^b f$ *konverguje absolutně a* $\int_a^b g$ *konverguje absolutně, pak* $\int_a^b (f+g)$ *konverguje absolutně.*

4. Ukažte, že pokud $\int_a^b f$ *konverguje absolutně a* $\int_a^b g$ *konverguje pouze neabsolutně, pak* $\int_a^b (f+g)$ *konverguje pouze neabsolutně.*

5. Tvrzení (2) a (4) zobecněte na součet konečně mnoha absolutně konvergentních a jednoho neabsolutně konvergentního integrálu.

6. Mějme dva pouze neabsolutně konvergentní integrály $\int_a^b f$ *a* $\int_b^c f$*. Musí integrál* $\int_a^c f$ *konvergovat? Může konvergovat absolutně?*

7. Mějme dva neabsolutně konvergentní integrály $\int_a^b f$ *a* $\int_a^b g$*. Musí integrál* $\int_a^b (f+g)$ *konvergovat? Může konvergovat absolutně?*

Návod: 1. Tvrzení plyne přímo z aditivity integrálu vůči oboru.

2. Neabsolutní konvergence plyne z aditivity integrálu vůči oboru integrace. "Součet" nemůže konvergovat absolutně, neboť buď nemá $|f|$ na (b, c) zobecněnou primitivní funkci, anebo je $\int_b^c |f| = +\infty$ a potom

$$\int_a^c |f| \geq \int_b^c |f| = +\infty$$

3. Plyne z přímo linearity integrálu.

4. Analogicky jako ve 2, přičemž pro nekonečný případ použijte odhad $|f+g| \geq |g| - |f|$.

5. Ponecháno čtenáři.

6. Konvergence plyne z aditivity integrálu vůči oboru. Absolutně konvergovat nemůže, ukáže se to analogicky jako v případě 2.

7. Konvergence plyne z linearity integrálu. Absolutní konvergence je možná, položte $a = 1$, $b = +\infty$ a $f = \frac{\sin x}{x}$, $g = -f$. Pak $f + g = 0$ identicky.

Závěr je, že integrál ze zadání konverguje, právě když $\alpha < -1$ nebo $\alpha > 1$. ■

§27. Užitečným kritériem pro neabsolutní konvergenci integrálu je **Dirichletovo kritérium**.

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a,b)$, každá (ekvivalentně nějaká) primitivní funkce k f je omezená na (a,b), funkce g je monotónní na $[a,b)$ a $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = 0$. Pak $\int_a^b fg$ konverguje. Analogické tvrzení platí pro intervaly typu $(a,b]$.

P ř í k l a d   Integrál $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ pro $\alpha > 0$ konverguje.

Řešení. Funkce $f(x) = \cos x$ má omezenou primitivní funkci $\sin x$, funkce $g(x) = 1/x^\alpha$ je klesající a má v $+\infty$ limitu 0. Navíc jsou obě funkce spojité na $[1,\infty)$, a tedy integrál konverguje dle Dirichletova kritéria. ■

Poznamenejme, že tento příklad bychom mohli řešit pomocí metody per partes jako v §26. To není náhoda, Dirichletovo kritérium pro případ, kdy g má spojitou derivaci, lze pomocí metody per partes dokázat.

P ř í k l a d   Integrál $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|\,dx$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.

Řešení. Konvergence pro $\alpha > 1$ byla dokázána v §24, divergence pro $\alpha \le 0$ plyne z příkladu v §23 a z toho, že absolutní konvergence implikuje konvergenci (viz §24). Nechť $\alpha \in (0,1]$. Platí

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}.$$

Přitom $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ diverguje a $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\,dx$ konverguje podle Dirichletova kritéria (funkce x^α je klesající a má v ∞ limitu 0, funkce $\cos 2x$ má omezenou primitivní funkci). A tedy $\int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx$ diverguje (viz §22). Podle srovnávacího kritéria původní integrál diverguje. ■

P ř í k l a d   Zjistěte, zda konverguje integrál $\int_2^\infty \frac{\sin x}{x+2\sin x}\,dx$.

Řešení. Funkce $\sin x$ má omezenou primitivní funkci, a tak můžeme zkusit použít Dirichletovo kritérium. Funkce $\frac{1}{x+2\sin x}$ má limitu 0, ale není monotónní (jest $(x+2\sin x)' = 1 + 2\cos x$, a tato derivace pravidelně mění znaménko). Takže Dirichletovo kritérium použít nelze. Víme však, že konverguje $\int_2^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ a můžeme zkusit použít postřehu z §22. Tedy náš integrál konverguje, právě když konverguje integrál $\int_2^\infty \left(\frac{\sin x}{x+2\sin x} - \frac{\sin x}{x}\right) dx$. Upravíme-li integrand, vyjde $\int_2^\infty \frac{-2\sin^2 x}{x(x+2\sin x)}\,dx$. Tento integrál srovnáme s konvergentním integrálem $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$. Je totiž

$$|-2\sin^2 x| \le 2 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x(x+2\sin x)}}{\frac{1}{x^2}} = 2.$$

§22. **Integrál součtu.** Občas se hodí následující jednoduché pozorování.

Nechť f, g jsou spojité na (a,b) a $\int_a^b g$ konverguje. Pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b (f+g)$.

Příklad Konverguje integrál $\int_0^1 \frac{1-\sin x}{x}\,dx$?

Řešení. Integrál $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ konverguje (viz §20), zatímco $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverguje dle příkladu v předchozím paragrafu. Proto podle uvedeného tvrzení náš integrál diverguje. ■

Další, méně triviální, případy použití pozorování z tohoto paragrafu v kombinaci s jinými kritérii jsou uvedeny dále.

§23. **Bolzano-Cauchyova podmínka.** Následující věta dává nutnou a postačující podmínku pro konvergenci integrálu. Je přeformulací Bolzano-Cauchyovy podmínky pro existenci vlastní limity primitivní funkce.

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a,b)$. Pak integrál $\int_a^b f$ konverguje, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b' \in (a,b)$ takové, že pro každé dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ platí $|\int_{x_1}^{x_2} f| < \varepsilon$. Analogické tvrzení platí pro interval typu $(a,b]$.

Příklad Je-li $\alpha \geq 0$, integrál $\int_1^\infty x^\alpha \sin x\,dx$ diverguje.

Řešení. Použijeme Bolzano-Cauchyovu podmínku. Je-li $k \geq 1$ celé číslo, platí

$$\left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^\alpha \sin x\,dx \right| \geq (k\pi)^\alpha \int_0^\pi \sin x\,dx = 2(k\pi)^\alpha \geq 2\pi^\alpha.$$

Zvolme nyní $\varepsilon = \pi^\alpha$. Pro každé $b' < \infty$ existuje $k \geq 1$ celé tak, že $k\pi > b'$. Položme $x_1 = k\pi$ a $x_2 = (k+1)\pi$. Pak dle uvedeného výpočtu je $\left|\int_{x_1}^{x_2} x^\alpha \sin x\,dx\right| > \varepsilon$. Integrál proto diverguje. ■

§24. **Srovnávací kritérium** je obsaženo v následující větě.

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu (a,b) a pro každé $x \in (a,b)$ platí $|f(x)| \leq g(x)$. Pokud $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ konverguje též. (A tedy, diverguje-li $\int_a^b f$, diverguje i $\int_a^b g$.)

Důsledkem je následující tvrzení.

Nechť f je funkce spojitá na (a,b). Pokud $\int_a^b f$ konverguje absolutně, pak i konverguje.

Příklad Pokud $\alpha > 1$, pak $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ konverguje (dokonce absolutně).

Řešení. Platí totiž $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$ a integrál $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ pro $\alpha > 1$ konverguje (viz §21). Proto podle srovnávacího kritéria $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$ konverguje. Tedy i původní integrál konverguje (dokonce absolutně). ∎

P ř í k l a d Integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx$ diverguje.

Řešení. Pro $x \in (1, \infty)$ je totiž $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \geq \frac{\operatorname{arctg} 1}{x} = \frac{\pi}{4x} \geq 0$ a integrál $\int_1^\infty \frac{\pi}{4x}\, dx$ diverguje. ∎

§25. Užitečnou variantou srovnávacího kritéria je **limitní srovnávací kritérium**.

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a, b)$ (kde $-\infty < a < b \leq +\infty$), funkce g nechť je kladná na $[a, b)$.

(i) Pokud limita $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ také konverguje (dokonce absolutně).

(ii) Pokud limita $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b g$.

Analogická tvrzení platí pro interval typu $(a, b]$.

P ř í k l a d Zjistěte, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x\, dx$.

Řešení. Funkce $f(x) = \sin^\alpha x$ a $g(x) = x^\alpha$ jsou spojité a kladné na $(a, b] = (0, \pi/2]$ a platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^\alpha x}{x^\alpha} = 1,$$

tedy integrál ze zadání konverguje, právě když konverguje $\int_0^{\pi/2} x^\alpha\, dx$. Ten ovšem konverguje právě pro $\alpha > -1$. To můžeme ověřit přímým výpočtem. Plyne to též z prvního příkladu v §21 s použitím faktu, že $\int_1^{\pi/2} x^\alpha\, dx$ konverguje dle §20.

Závěr je, že integrál konverguje právě pro $\alpha > -1$. ∎

P ř í k l a d Zjistěte, zda konverguje $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Řešení. Integrand je spojitý na $(0, \pi]$ a platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}} = \sqrt{2}.$$

Tedy vyšetřovaný integrál konverguje, právě když konverguje $\int_0^\pi \frac{dx}{x}$. Ten ovšem diverguje, tudíž diverguje i původní integrál. ∎

P ř í k l a d Pro které hodnoty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x\, dx$?