Stirlingův vzorec

$$N! \sim \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N.$$

Důkaz: Označme

$$L(x) := \int_0^x \log t \, \mathrm{d}t = x\log x - x, \quad x > 0; \tag{1}$$

$$\epsilon_n := \log n - L\left(n + \frac{1}{2}\right) + L\left(n - \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Číslo ϵ_n má zřejmě význam chyby, které se dopustíme, když $\log n$ nahradíme průměrnou hodnotou $\log x$ na intervalu $\left[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right]$. Podle Talorova rozvoje funkce L do řádu druhého v bodě n s Lagrangeovým tvarem zbytku platí:

$$\begin{aligned} L\left(n + \frac{1}{2}\right) &= L(n) + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{8\xi_n}, \\ L\left(n - \frac{1}{2}\right) &= L(n) - \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{8\lambda_n}, \end{aligned} \tag{3}$$

kde $\xi_n \in \left[n, n + \frac{1}{2}\right]$, $\lambda_n \in \left[n - \frac{1}{2}, n\right]$. Odtud dostáváme, že

$$0 \le \epsilon_n = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\xi_n}\right) \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{8\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)}. \tag{4}$$

Sečteme-li nyní rovnici (2) pro $n = 1, 2, 3, \ldots, N$ a položíme-li $N \to \infty$, dospějeme k identitě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n - L\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{N\to\infty}\left[\log N! - L\left(N + \frac{1}{2}\right)\right], \tag{5}$$

kde řada na levé straně konverguje dle odhadu (4) a srovnávacího kritéria. Plyne odtud (po aplikaci funkce exp), že existuje konstanta $\alpha \in (0, \infty)$ taková, že

$$N! \sim \alpha \exp\left[L\left(N + \frac{1}{2}\right)\right] = \alpha\left(\frac{N + \frac{1}{2}}{e}\right)^{N + \frac{1}{2}} \sim \alpha\sqrt{N}\left(\frac{N}{e}\right)^N. \tag{6}$$

Konstantu α lze určit dosazením (6) do Wallisova součinu:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{(2n)^4}{[(2n-1)2n]\cdot[2n(2n+1)]} \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\left(\frac{4^N(N!)^2}{(2N)!}\right)^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\left(\sqrt{\frac{N}{2}}\alpha\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4}. \end{aligned} \tag{7}$$

Tedy musí platit $\alpha = \sqrt{2\pi}$. $\square$