Základní definice a poznatky z teorie číselných řad

Nechť a_n je číselná posloupnost. Označme

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{(řada)}, \qquad S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \quad \text{(částečný součet)}, \qquad S_{\text{abs}} = \sum_{n=1}^{N} |a_n|.$$

Definice:

- Píšeme $S = \lim_{N\to\infty} S_N$, jestliže pravá strana má smysl.
- Řada S **konverguje** (K), jestliže $\lim_{N\to\infty} S_N$ existuje vlastní.
- Řada S **konverguje absolutně** (AK), jestliže řada S_{abs} konverguje.
- Řada S **diverguje** (D), jestliže nekonverguje.
- Řada S **konverguje neabsolutně** (NAK), jestliže S konverguje, ale S_{abs} diverguje.
- Řada S **diverguje do** $\pm\infty$, jestliže $\lim_{N\to\infty} S_N = \pm\infty$.
- Řada S **osciluje**, jestliže limita $\lim_{N\to\infty} S_N$ neexistuje.

Základní poznatky:

- Absolutně konvergující řady konvergují (AK $\implies$ K).
- Řady s nezápornými členy ($a_n \geq 0$) nikdy neoscilují (díky monotonii částečných součtů) a pojmy konvergence a absolutní konvergence pro ně splývají.
- Pro libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ řada S konverguje, právě když

  $$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0+n}$$

  konverguje. (Tedy konvergence není nikterak ovlivněna hodnotou prvních n_0 členů.)
- Platí tzv. **nutná podmínka konvergence**: Jestliže S konverguje, pak $a_n \to 0$.

Dobrá strategie pro vyšetřování konvergence je tato: Nejprve si rozmyslíme, zda-li je splněna nutná podmínka konvergence (pokud $a_n \not\to 0$, okamžitě víme, že řada diverguje). Poté zkusíme vyšetřit absolutní konvergenci (pomocí srovnávacího, podílového, odmocninového, kondenzačního či integrálního kritéria). Pokud řada konverguje absolutně, nebo pokud je řada nezáporná, jsme hotovi. V opačném případě zkusíme použít Abelovo či Dirichletovo kritérium, abychom zjistili, zda-li řada konverguje alespoň neabsolutně.

Kritéria konvergence

1) Srovnávací

Nechť $0 \le a_n \le b_n$ pro všechna n dosti velká. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{K} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{K} \qquad \& \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{D} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{D}.$$

2) Limitně srovnávací

Nechť a_n, b_n jsou nezáporná pro všechna n dosti velká. Je-li

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty, \quad \text{potom} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{K} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{K},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0, \quad \text{potom} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{D} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{D}.$$

: Nejčastěji srovnáváme s řadou $\sum n^{-p}$, která konverguje, právě když $p > 1$.

3) Podílové a odmocninové

Nechť a_n jsou nezáporná pro všechna n dosti velká a q je dáno jednou z definic:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \text{(Podílové)}$$

nebo

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}. \qquad \text{(Odmocninové)}$$

Pak platí:

$$q < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{K} \qquad \& \qquad q > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{D}.$$

: Pro $q = 1$ jsou tato kritéria nerozhodná (řada může konvergovat i divergovat).

: Tato kritéria fungují na principu srovnání s geometrickou řadou s kvocientem q a jsou do značné míry ekvivalentní. Výpočet q dává v obou případech stejný výsledek, pakliže příslušné limity existují. (Může se však stát, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existuje, ale $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ nikoliv.)

4) Cauchyho kondenzační

Nechť a_n jsou nezáporná a nerostoucí pro n dosti velká. Pak platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{K} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad \text{K}.$$

: Toto kritérium může zjednodušit řady, ve kterých se vyskytují logaritmy, využijeme-li identity $\log 2^n = n \log 2$.

: Kondenzační kritérium převádí řadu $\sum n^{-p}$ *na řadu geometrickou s kvocientem* $q = 2^{1-p}$.

5) Integrální

Nechť $a_n = f(n)$ pro všechna n dosti velká, kde f je nerostoucí, nezáporná a spojitá funkce na $[1, \infty)$. Potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{K} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{K}.$$

6) Pro řady typu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Je-li splněn jeden z následujících předpokladů

$$a_n \searrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{má omezené částečné součty,} \qquad \text{(Dirichetovo)}$$

nebo

$$a_n \quad \text{je monotónní a omezená,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{K,} \qquad \text{(Abelovo)}$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

: Speciálním případem Dirichletova kritéria je $b_n = (-1)^n$*, což je tzv. Leibnizovo kritérium. Součet řady Leibnizova typu má stejné znaménko jako první člen a částečné součty tvoří posloupnost střídavě horních a dolních odhadů.*

: Je dobré si pamatovat, že pro $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ *mají řady* $\sum e^{inx}$, $\sum \cos nx$, $\sum \sin nx$ *omezené částečné součty.*

: V některých situacích potřebuji použít tato kritéria vícenásobně. Například řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n \cos n}{n}$ *konverguje, neb nejprve* $\sum \frac{\cos n}{n}$ *konverguje (Dirichlet) a posloupnost* $\arctan n$ *je monotónní. Tedy lze aplikovat Abelovo kritérium.*

Teorie mocninných řad

Komplexní mocninná řada se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ s koeficienty $c_n \in \mathbb{C}$ je řada tvaru

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

kterou vyšetřujeme vzhledem k parametru $z \in \mathbb{C}$. Pro mocninnou řadu vždy existuje právě jedno číslo $R \in [0, \infty]$ (poloměr konvergence) takové, že pro $|z - z_0| < R$ řada konverguje absolutně a pro $|z - z_0| > R$ diverguje. Poloměr konvergence můžu spočítat ze vzorce

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

(s konvencí $\frac{1}{\infty} = 0$). Na kružnici $|z - z_0| = R$ nemám o konvergenci apriori žádnou informaci a musím tak použít konvergenční kritéria.

: Poloměr konvergence můžu alternativně spočítat ze vzorce

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|,$$

pokud pravá strana má smysl.

: Někdy ale není potřeba poloměr konvergence počítat vůbec! Například všimnu-li si, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 5n}{n} z^{4n+1}$$

se středem v bodě nula konverguje neabsolutně pro $z = 1$, plyne odtud, že $R = 1$ (neboť k neabsolutní konvergenci nemůže dojít ani uvnitř ani vně poloměru konvergence).

Následující dvě věty jsou velmi intuitivní. Je ale třeba mít na paměti, že pro jiné než mocninné řady obecně neplatí!

1) Derivování člen po členu uvnitř poloměru konvergence

Mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$ mají totožný poloměr konvergence R a platí:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}, \quad \forall |z - z_0| < R.$$

: Speciálně má uvnitř poloměru konvergence funkce $S(z)$ spojité derivace všech řádu.

2) Abelova věta (speciální případ)

Nechť komplexní mocninná řada S má střed 0. Jestliže S konverguje v bodě Z, pak platí:

$$S(Z) = \lim_{t \to 1^-} S(tZ).$$

Sčítaní řad

V hrstce případů lze nejen dokázat konvergenci řady, ale i vyjádřit její součet v "uzavřeném tvaru", nebo alespoň najít ekvivalentní vyjádření (třeba v integrálním tvaru).

1) Teleskopické řady

Nechť $p \in \mathbb{N}$, $b_n \to 0$. Analýzou částečných součtů lze snadno nahlédnout, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+p}) = \sum_{n=1}^{p} b_n.$$

Příklad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{n^2}{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}.$$

2) Sčítaní s využitím teorie mocninných řad

Pomocí věty o derivování mocninných řad člen po členu lze sečíst některé řady typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} c_n \alpha^n$$

kde α je číslo, P, Q jsou polynomy s racionálními kořeny a c_n jsou koeficienty známé Taylorovy řady (třeba funkcí $(1+x)^{-p}$, $\exp x$, $\ln(1+x)$, $\sin x$, atp.). Pokud je α na hranici kruhu konvergence, aplikuji Abelovu větu. Příklady:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} n x^n \right]_{x=\frac{1}{5}} = \left[x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \right]_{x=\frac{1}{5}} = \left[x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{1}{1-x} \right) \right]_{x=\frac{1}{5}} \\ &= \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]_{x=\frac{1}{5}} = \frac{5}{16}. \quad \text{(p.k. } R = 1 > 1/5)\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(2n+1)!} = f(1), \quad \text{kde} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+4}}{(n+2)(2n+1)!}. \quad \text{(p.k. } R = \infty > 1)$$

$$\implies f'(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!} = 2x^2 \sinh x, \quad f(0) = 0.$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(2n+1)!} = \int_0^1 2x^2 \sinh x \, \mathrm{d}x = \cdots = -4 + \frac{5}{e} + e.$$