ODR jedné proměnné: přehled základních metod

1) Separace proměnných

Metoda použitelná pro ODR ve tvaru:

$$\boxed{y' = f(x)g(y).} \tag{1}$$

Pro každý kořen λ funkce g získáme okamžitě konstantní řešení $y \equiv \lambda$. Další řešení získáme formální úpravou:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \implies \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x \implies \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Spočítáme primitivní funkce a dostaneme implicitní rovnici pro x, y. Tu se pokusíme vyřešit vzhledem k y. Při integraci nesmíme zapomenout na aditivní konstantu C, která ve výsledku vystupuje jako parametr. Řešení ověříme zkouškou. Nakonec je třeba provést diskuzi, zda-li lze jednotlivá řešení lepit. K tomu dochází, když nekonstantní řešení konverguje ke kořeni funkce g v konečném "čase".

Pár tipů:

- Je užitečné nakreslit si napřed obrázek, na kterém znázorníme, kdy nabývá pravá strana $f(x)g(y)$ kladných, záporných, resp. nulových hodnot. Tak zjistíme, kde bude řešení růst, klesat resp. bude nabývat stacionárních bodů.
- Speciální případ $y' = f(y)$ je tzv. autonomní rovnice jedné proměnné. Všechna řešení této rovnice musejí být vždy monotónní.
- Při řešení Cauchyovy úlohy můžeme použít určité integrály

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{g(\eta)} = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

  a získáme rovnou řešení splňující $y(x_0) = y_0$.

2) Homogenní rovnice

Nazýváme tak ODR ve tvaru:

$$\boxed{y' = F\left(\frac{y+b}{x+a}\right).} \tag{2}$$

Řešíme substitucí $y \mapsto z := (y+b)/(x+a)$, jež vede na rovnici

$$(x+a)z' + z = F(z) \implies z' = \frac{F(z) - z}{x+a},$$

kterou umíme vyřešit separací proměnných. Nakonec provedeme zpětnou substituci.

3) Integrační faktor

Metoda použitelná pro ODR ve tvaru:

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x).} \tag{3}$$

Řešíme vynásobením integračním faktorem $\gamma = e^{F(x)}$, kde F je libovolná primitivní funkce k f:

$$\gamma y' + \underbrace{\gamma f}_{\gamma'} y = \gamma g \quad \Longrightarrow \quad (\gamma y)' = \gamma g \quad \Longrightarrow \quad \gamma y = \int \gamma g \, \mathrm{d}x.$$

Je-li H primitivní funkce ke γg, obecné řešení lze psát ve tvaru

$$y(x) = \frac{H(x) + C}{\gamma(x)}.$$

4) Bernoulliova rovnice

Nazýváme tak ODR ve tvaru:

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \qquad \alpha \neq 1} \tag{4}$$

Řešíme vydělením y^{α} a následnou substitucí $z := y^{1-\alpha}$, která vede na rovnici

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z = g(x).$$

Dořešíme s použitím integračního faktoru. Pozor, pro $\alpha > 0$ je řešením také konstantní funkce $y \equiv 0$. Může docházet k lepení s tímto řešením!

5) Homogenní lineární rovnice n-tého řádu

s konstantními koeficienty je ODR ve tvaru:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0,} \tag{5}$$

kde $a_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, $a_n \neq 0$. Zde stačí najít všechny komplexní kořeny polynomu

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k.$$

Za každý reálný kořen λ násobnosti m získáme m lineárně nezávislých řešení:

$$e^{\lambda x}, \qquad e^{\lambda x}x, \qquad e^{\lambda x}\frac{x^2}{2}, \quad \ldots, \quad e^{\lambda x}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Za každý pár nereálných komplexně sdružených kořenů $\lambda = \alpha + \beta i, \quad \overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ s násobností m obdržíme $2m$ lineárně nezávislých řešení:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad e^{\alpha x}\cos\beta x\,\frac{x^2}{2}, \quad \dots, \quad e^{\alpha x}\cos\beta x\,\frac{x^{m-1}}{(m-1)!};$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad e^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad e^{\alpha x}\sin\beta x\,\frac{x^2}{2}, \quad \dots, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x\,\frac{x^{m-1}}{(m-1)!};$$

Protože p má právě n kořenů včetně násobností, získáme dohromady n-tici lineárně nezávislých řešení $w_1, \dots, w_n$ (tzv. **fundamentální systém**). Obecné řešení má tvar

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k w_k(x),$$

pro libovolnou kombinaci konstant $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$.

6) Nehomogenní lineární rovnice n-tého řádu

s konstantními koeficienty je ODR ve tvaru:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = f(x),} \tag{6}$$

kde $a_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, $a_n \neq 0$ a kde $f = f(x)$ je zadaná funkce. Známe-li jedno libovolné řešení této rovnice y_p (partikulární řešení), pak obecné řešení lze psát ve tvaru

$$y(x) = y_p(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k w_k(x),$$

kde $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ a kde $w_1, \dots, w_n$ je fundamentální systém příslušné homogenní rovnice (5). Pro nalezení partikulárního řešení můžeme použít jeden z těchto tří postupů:

- **Náhodné tipování.** Nejrychlejší metoda, pokud máme dobrou intuici.
- **Metoda neurčitých koeficientů.** Pokud f lze napsat v následujícím tvaru

  $$f(x) = e^{\alpha x}(q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\sin\beta x),$$

  kde q_1, q_2 jsou polynomy stupně nejvýše s, pak partikulární řešení hledáme ve tvaru

  $$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}(r_1(x)\cos\beta x + r_2(x)\sin\beta x),$$

  kde m je násobnost $\lambda = \alpha + \beta i$ jakožto kořene charakteristického polynomu p (m může být 0) a r_1, r_2 jsou polynomy stupně nejvýše s.
- **Speciální substituce.** Alternativně k předešlému si můžeme prostě pamatovat, že pro polynomiální pravou stranu hledáme polynomiální řešení. V případě, kdy se na pravé straně vyskytuje $\exp, \cos$ nebo $\sin$, mohu zjednodušit pomocí těchto substitucí (druhý a třetí řádek fungují za předpokladu, že β, f, a_k jsou reálné):

rovnice před	substituce	rovnici po
$p(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y = f(x)e^{\alpha x}$	$y = e^{\alpha x}z(x)$	$p(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \alpha)z = f(x)$
$p(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y = f(x)\cos(\beta x)$	$y = \mathrm{Re}(e^{i\beta x}z(x))$	$p(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + i\beta)z = f(x)$
$p(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y = f(x)\sin(\beta x)$	$y = \mathrm{Im}(e^{i\beta x}z(x))$	$p(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + i\beta)z = f(x)$

- **Variace konstant.** To je metoda pracná, ale univerzální. Nejprve je třeba vyřešit lineární soustavu rovnic:

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ w_1' & w_2' & \dots & w_n' \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ w_1^{(n-2)} & w_2^{(n-2)} & \dots & w_n^{(n-2)} \\ w_1^{(n-1)} & w_2^{(n-1)} & \dots & w_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_{n-1}' \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f}{a_n} \end{pmatrix}.$$

  Poté k funkcím $C_1', \dots C_n'$ spočítáme primitivní funkce $C_1, \dots C_n$. Výsledkem je partikulární řešení

$$y_p = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)w_k(x).$$

7) Eulerova ODR

je často vyskytující se typ lineární rovnice s nekonstantními koeficienty:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)} = f(x), \quad x > 0 \tag{7}$$

kde $a_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, $a_n \neq 0$ a kde $f = f(x)$ je zadaná funkce. Substitucí

$$z(t) = y(e^t)$$

převedeme na lineární rovnici s konstantními koeficienty

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)z = f(e^t),$$

s charakteristickým polynomem

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k k! \binom{\lambda}{k},$$

kterou umíme řešit. Nakonec provedeme zpětnou substituci

$$y(x) = z(\ln x).$$

Ve speciálním případě $f = 0$ a kdy p má n reálných jednonásobných kořenů jsou řešením lineární kombinace funkcí x^λ, kde λ je kořen p.