Algebra 22/23: 8. cvičení — skupina Ježil

Algebra polynomů

8 Konečná tělesa, symetrické polynomy

8.1 Z minula

1. V okruhu $\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^4+\alpha^3+\alpha+2)$ najděte prvek, který nemá inverz.

2. Zadefinujte zobrazení mezi $\mathbb{Q}[\alpha]/(\alpha^3-2)$ a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, o kterém máte pocit, že by mělo být izomorfismus. Co musíte ověřit, abyste dokázali, že to doopravdy izomorfismus je?

8.2 Konečná tělesa

1. Napište tabulky operací čtyřprvkového tělesa.

2. V tělese $\mathbb{Z}_5[\alpha]/(\alpha^3+\alpha+1)$ spočtěte

(a) $(3\alpha^2+4\alpha+1)+(2\alpha^2+4)$,

(b) $(3\alpha^2+4\alpha+1)\cdot(2\alpha^2+4)$,

(c) $(2\alpha^2+4)^{-1}$,

(d) řešení lineární rovnice $\alpha\cdot x+(\alpha+1)=\alpha^2$.

3. V tělese $\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^2+\alpha+1)$ spočtěte řešení soustavy linárních rovnic zadané maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & \alpha+1 \\ \alpha+1 & \alpha+1 & \alpha \end{array}\right)$$

4. Dokažte, že v tělese $\mathbf{T}=\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2+1)$ najděte prvek u s vlastností, že každý nenulový prvek tělesa $\mathbf{T}$ lze napsat jako mocnina u. Napište ireducibilní rozklad polynomu x^8-1 v $\mathbf{T}[x]$.

5. Buď $\mathbf{T}=\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^4+\alpha^3+1)$. Najděte ireducibilní rozklad polynomu x^3-1 v $\mathbf{T}[x]$.

6. Popište rozkladové nadtěleso polynomu (a) x^2+x+1 nad $\mathbb{Z}_2$, (b) x^4-1 nad $\mathbb{Z}_3$.

8.3 Symetrické polynomy a Viètovy vztahy

1. Je následující polynom symetrický?

$$(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$$

2. Vyjádřete následující symetrické polynomy jako součet součinů elementárních symetrických polynomů:

$$3x^2yz+3xy^2z+3xyz^2, \qquad x^3(y+z)+y^3(x+z)+z^3(x+y).$$

3. Buď $\mathbf{T}$ těleso a $f=\sum_{i=0}^n a_i x^i$ polynom z $\mathbf{T}[x]$ a $u_1,\dots,u_n$ všechny jeho kořeny v nějakém nadtělese. Vyjádřete součet třetích mocnin jeho kořenů $u_1^3+\dots+u_n^3$ pomocí koeficientů $a_0,\dots,a_{n-1}$.