Zkušenosti s distančním vzděláváním talentovaných žáků I: Wallace-Bolyai-Gerwienova věta

Zbyněk Šír a Karel Pazourek

Abstrakt

Tento příspěvek je věnován naší zkušenosti s online výukou matematiky talentovaných středoškoláků. Konkrétně se budeme věnovat první části matematického kurzu pořádeného v rámci projektu TALNET. Krátce shrnujeme matematický obsah tohoto rozšiřujícího kurzu a způsob jakým je látka rozvžena v lekcích. Dále se věnujeme konkrétním otázkám spojeným s výukou studentů v roce 2007 a uvádíme ukázky studentských výsledků.

1 Úvod

V tomto článku iformovat o matemtickém kurzu pořádaném v rámci projektu Talne - viz [1] Talnet je projektem, který je zaměřen na vzdělávání talentovaných žáků a studentů. Projekt probíhá pod hlavičkou NIDM a je realizován Laboratoří distančního vzdělávání Katedry didaktiky fyziky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Náplní Talnetu jsou především kurzy z fyzikálních disciplín, chemie, biologie a geografie. Počátky Talnetu sahají až do r. 2003, kdy byl spuštěn první kurz. Od té doby se postupně zvyšuje počet kurzů i zúčastněných studentů, zvětšuje se nabídka témat, typů vzdělávacích aktivit a i rozsah věkových kategorií od (13) 14 do 19 let (od roku 2007).

Kurzy probíhají převážně on-line formou, začínají úvodním prezenčním soustředěním v září a skládají se ze čtyř výukových bloků. Na podzim probíhá první kolektivní výukový blok a následuje blok věnovaný individuální práci žáka na seminární prací pod vedením instruktora, její online obhajobě před spolužáky. Na společném zimním soustředění v únoru prezentují své práce před plénem. Jarní výukový blok probíhá podle shodného schématu jako na podzim. T-kurzy končí společným třídenním letním soustředěním v červnu.

Během kurzů věnovaných přírodním vědám se projevovalo přání i potřeba zařadit do Talnetu rovněž kurzy matematické. Proto v roce 2007 autoři tohoto článku vytvořili dva semestrální kurzy pod rámcovou hlavičkou *Matematické algoritmy a jejich geometrické reprezentace*. Záměrem kurzu je studenty seznámit s několika algoritmy, jejichž výsledkem je přesné, nebo přibližné řesení problémů matematických či reálných. Důraz je přitom kladen na souvislost čistě algoritmického postupu s jeho porozuměním, které je navozeno především geometricky. Tento článek je věnován první polovině tohoto kurzu, která se zabývá měřením plošných útvarů a převodem jednoho na druhý. Druhé části, zabývající se algoritmy pro polynomy, je věnován článek [6].

Zbytek tohoto článku je organizován následujícím způsobem. Ve druhé části stručně představíme matematický obsah probírané látky a její didaktické rozvržení do lekcí. Ve třetí části pojednáme o našich konkrétních zkušenostech s online vyukou talentovaných studentů a ukážeme některá jejich řešení zadaných problémů. V závěrečné diskuzi se pokusíme zaujmout nadhled k naší zkušenosti a představíme plánované pokračování projektu.

2 Matematický obsah a struktura kurzu

V této části stručně představíme téma kurzu Wallace-Bolyai-Gerwienova větu a naznačíme, jakým způsobem jsme její osvojení rozložili do jednotlivých lekcí kurzu Talnet.

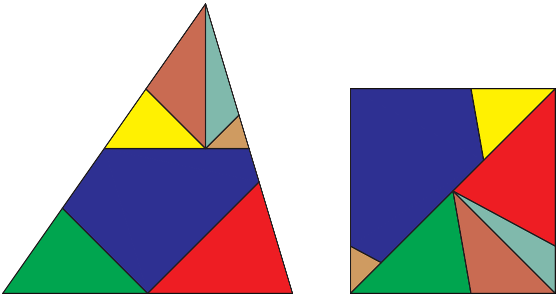
2.1 Problém přeměny rovinných útvarů

Porovnávání obsahů rovinných útvarů je klasickým tématem geometrie. Například značná část Eukleidových Základů je věnována tomuto problému. Nejedná se přitom jen o otázku zajímavou samu o sobě. Být schopen porovnat obsahy vposledku znamená být schopen měřit v nějakých jednotkách! Například v naší společnosti je zvykem vyčíslit plochy nějakého pozemku tím, že se porovná s plochou čtverce o straně 1m. Říkáme totiž kupříkladu, že pozemek má plochu 1000m^2. Kromě výpočtu obsahů je ve středoškolské látce oblímeným tématem konstrukce útvarů o stejném obsahu; jako příklad uveďme konstrukci čtverce o stejném obsahu jako daný obdélník. Znění Wallace-Bolyai-Gerwienovy věty je následující:

> *Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah právě tehdy, když je možné je rozdělit na stejný počet po dvou shodných mnohoúhelníků.*

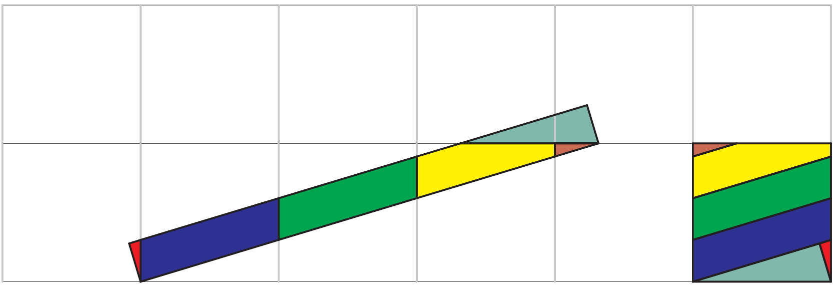
Jako ukázku uvádíme na obr. 1 shodné rozdělení trojúhelníka a čtverce.

Tato půvabná věta je samozřejmě poměrně jednoduchá, ale naše zkušenosti ukazují, že její platnost i důkaz jsou mezi matematiky poměrně neznámé. Velice stručně naznačme její důkaz. Nejprve si ujasněme, že pro každý daný mnohoúhelník umíme pomocí kružítka a pravítka sestrojit stranu čtverce o stejném obsahu. Nejprve si rozdělíme mnohoúhelník na trojúhelníky, každý trojúhelník převedeme na obdélník (se stejnou jednou základnou a poloviční výškou) a tento obdélník na čtverec (např. užitím Eukleidovy věty o výšce). Takto vzniklé čtverce po dvou začneme spojovat do jednoho užitím Pythagorovy věty - až dostaneme čtverec jediný.



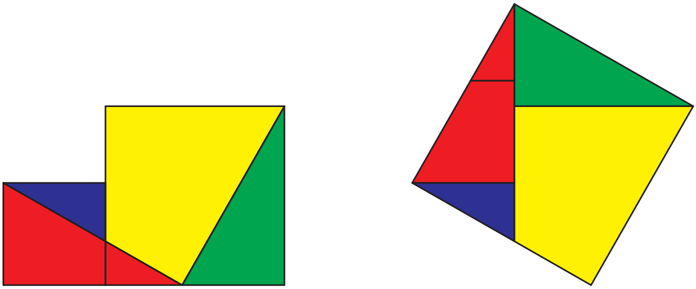
Obrázek 1 Přeskládání trojúhelníka na čtverec

Dále si ujasněme, že všechny zmíněné kroky jsme schopni provést přímým rozřezáním. Jak rozřezat trojúhelník a slozit obdélník je snadné a známé. Méně známý je převod obdélníka na čtverec, ktetý je patrný z obrázku 2. Obdélník vhodným způsobem vložíme do čtvercové sítě (se stranou rovnou výslednému čtverci - tu musíme nejprve sestrojit!) a toto síto nám obdélník rozřeže. Pak stačí části jen bez otáčení přesunout. Pro spojení dvou čtverců do jediného



Obrázek 2 : Přeměna obdélníka na čtverec.

potřebujeme užít důkaz Pythagorovy věty založený na rozdělení - nejjednodušší (a rovněž historicky velmi starý) je zřejmě důkaz patrný z obrázku 3. Konečně je třeba si uvědomit, že řezání potřebná v každém kroku můžeme zkombinovat - výsledné části jsou průniky částí v každém kroku. Máme-li dva mnohoúhelníky o stejném obsahu, pak je možno každý z nich rozřezat a z částí složit tentýž čtverec. Zkombinováním obou rozčezání výsledného čtverce získáme shodná rozřezání obou výchozích mnohoúhelníků.



Obrázek 3 : Řezací důkaz Pythagorovy věty.

2.2 Struktura kurzu

Látka tohoto kurzu byla rozdělena do šesti lekcích. Každou lekci měli studenti zvládnout přibližně za jeden týden. Náplní lekcí bylo prostudování textu a následné plnění úkolů, vztahujících se k danému textu - hledání dalších informací, aplikaci poznatků v příkladech. Pro informaci uvádíme obsah a strukturu jednotlivých lekcí.

Témata jednotlivých lekcí byla následující:

1. Motivace. Prostřednictvím studijního textu měli studenti pochopit, že slavný problém kvadraturym, tedy přeměny na čtverec má úzký vztah k teorii měření (ve čtverečních jednotkách) a není samoúčelný. Známé vzorce (ty si studenti připoměli počítáním obsahu dosti složitého útvaru) jsme se pokusili interpretovat jako výsledky kvadratury různých obrazců.

2. lekce: Cavalieriho princip - za jeho použití se studenti naučili pro libovolný mnohoúhelník sestrojit trojúhelník téhož obsahu (rovnověžným posouváním vrcholů).

3. lekce: Eukleidova a Pythagorova věta. Konstrukce odmocnin. Připomenutí a různé alternativní důkazy, včetně důkazů rozřezáním.

4. lekce: Geometrická algebra. Studenti se seznámili s tím jak konstruovat vypočítané hodnoty za pomoci kružítka a pravítka. Aplikováno v úkolu například na kostrukci strany čtverce se stejným obsahem, který má daný rovnostranný trojúhelník, což vede na konstrukci $\sqrt[4]{3}$.

5. lekce: Přeměna mnohoúhelníku na čtverec se stejným obsahem. Syntéza celého postupu, aplikace na konkrétní mnohoúhelníky.

6. Optimalizace algoritmu z hlediska počtu částí. Aplikace na složitější mnohoúhelníky.

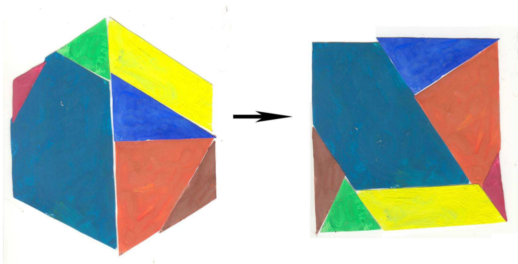
V každé lekci se studenti seznámili s jedním dílčím krokem v postupu přeměny mnohoúhelníka. Následně si tento krok procvičovali na příkladech. Instruktoři s nimi jejich postupy konzultovali, bylo-li třeba, opravovali studentovi omyly.

3 Zkušenosti s prvním během kurzu

3.1 Praktická implementace kurzu

Studenti mohli komunikovat s instruktory jak o jednotlivých lekcích, tak o tématech souvisejících. V závěru bloku studenti diskutovali nad pojmem algoritmus.

3.2 Výsledky studentů



Obrázek 4 Studenské řešení: šestiúhelník na čtverec. Autor Ondřej Bajgar.

– obrázky ... úkoly studentů
– seminární práce ...

Šestá lekce pak měla dvojí cíl: Prvním cílem bylo sestavit samotný algoritmus přeměny mnohoúhelníka na čtverec se stejným obsahem. Došlo tak k utřídění a seřazení vědomostí, které studenti mohli získat v předchozích lekcích. Druhým cílem bylo ukázat možnou neefektivitu použití algoritmu. Zformulovaný algoritmus nemusí být vhodným postupem v konkrétní situaci - pokud mnohoúhelník obsahuje symetrie, lze jich využít a některé kroky algoritmu zjednodušit nebo vynechat. Student tak uvažuje o předpokladech algoritmu, jeho zjednodušení - zaobírá se samotnými matematickými principy, na kterých je algoritmus postaven.

4 Diskuze

Během prvního bloku kurzu proběhla diskuze, ve které se studenti vyjadřovali k pojmu algoritmus. Ukázali se následující skutečnosti:

Studenti neuvažují nebo nezdůrazňují konečnost procesu. To patrně souvisí s nedostatkem zkušeností s nekonečnými matematickými objekty a procesy.

Studenti si uvědomují, že algoritmus může obsahovat "podprogramy" - tedy algoritmy, které plní dílčí úkony. Samotný algoritmus se pak pouze odkazuje na tyto "podprogramy". Někteří studenti však takový algoritmus považovali za "nepřesný".

Problém přesnosti se odráží i v otázce studenta, zda není "algoritmus synonymem pro podrobný návod". Naráží se tu na problém determinovanosti výstupů vstupními daty - toto nebylo studenty explicitně zmíněno. Přitom studenti měli přístup k materiálům, ve kterých byla tato vlastnost algoritmů uvedena.

Jeden student se pod dojmem z diskuze napsal: "Když jsem se nad tím trochu zamyslel, tak mi přišlo, že matematika je v podstatě celá jenom z algoritmů a že vlastně všechny operace, které v matematice provádíme, tak provádíme pomocí určitých postupů - tzn. pravděpodobně algoritmů..."

5 Závěr

výkřik do tmy

Do budoucna plánujeme .... .

Reference

[1] `www.talnet.cz`

[2] Cyr, S.: Can Distance Learning Meet the Needs of Gifted Elementary Math Students? Gifted Child Today (27) 2, 2004.

[3] Furner, J., Hobein M., Scullion, K.: Taking an Internet field trip. Tech Trends (44) 6. 2000.

[4] Pikomat MFF UK: 2003-2004; ročenka 19. ročníku. Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2004.

[5] Zhouf, J. et al.: Matematické příběhy z korespondenčních seminářů. Prometheus, Praha, 2006.

[6] Karel Pazourek a Zbyněk Šír, Zkušenosti s distančním vzděláváním talentovaných středoškoláků II: Polynomy, tento sborník.