

Příklady na 5. a 6. týden

Distribuce

- Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:
 a) $x^k \delta^{(n)}$, $k, n \in \mathbb{N}$ b) $e^{ix\omega} \delta^{(n)}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
- Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:
 a) $x^2 \Delta \delta$ b) $e^{i(x,\omega)} \Delta^k \delta$, $\omega \in \mathbb{R}^N$, $k \in \mathbb{N}$
 c) $e^{-a|x|^2} \Delta \delta$, $a > 0$
- Určete distribuce $\Delta T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:
 a) $u(x) = |x|^\lambda$, $\lambda \geq 2 - N$, $N \geq 2$ b) $u(x) = \ln |x|$
- Dokažte: Nechť f je hladká funkce na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A_k = f_+^{(k)}(0) - f_-^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Potom

$$D^n T_f = T_{D^n f} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \delta^{(n-1-k)}.$$

- Ukažte, že posloupnosti
 a) $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 x^2 + 1}$ b) $g_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n^2 x^2}{4}}$ c) $h_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}$
 konvergují v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ k δ distribuci.

(c) 1. ověřte předpoklady příslušného lemmatu, 2. zároveň ukažte přímo: ukažte, že primitivní funkce konverguje k $H(x)$ a pak derivujte. Pokus o řešení provedený na konci pondělního cvičení ignorujte.

(Po:) Čížek, König, Kouba, Krtouš, Liška, Mravcová, Uhliarová (St:) Bardachová, Kepčija, Novotný

- Ukažte, že

$$\frac{1}{x - i0} = \text{v.p.} \frac{1}{x} + i\pi\delta.$$

(Po:) Borák, Guth Jarkovský, Hojnoš, Kassayová, Knob, Kotlařík, Ronovský, Skoupý (St:) Dušek, Spasovová, Vyhňálková

(Po, St:) všichni ostatní řešte příklad 2 (celý) z následující sady.