Příklady na 5. a 6. týden

Laplaceova transformace

1. Dokažte z tabulky Laplaceových vzorů a obrazů to, co ještě nebylo dokázáno na přednášce.

2. Zejména za domácí úkol: spočtěte Laplaceovu transformaci fce (viz tabulku)
$$f(t) = \frac{\sin \omega t}{t}.$$

Pondělí: Čížek, Jiříček, Knob, Kouba, Mravcová, Ronovský, Skoupý, Slezák D.

Středa: Kepčija, Peštová, Vyhnálková

Speciální funkce

3. Definujme B-funkci:
$$B(p,q) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,\mathrm{dt}.$$

Ukažte, že platí
$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^\infty \frac{r^{2q-1}}{(1+r^2)^{p+q}}\,\mathrm{d}r = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{qt}}{(1+\mathrm{e}^t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

(Poslední výraz znáte z minulého cvičení.)

Pondělí, Středa: množina ostatní (nezlobte se, pro jednou jsem použil množiny z minula)

4. Pro $s \in (0,1)$ spočtěte $B(s, 1-s)$ a odtud
$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^\lambda x \,\mathrm{d}x$$
pro $-1 < \lambda < 1$.

Pondělí: Borák, Hojnoš, Kassayová, Kotlařík, Liška, Poláček, Skácel, Slezák P.

Středa: Dušek, Novotný, Šestáková

5. Pro $\nu \geq 0$ uvažujte Besselovu rovnici

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \Big(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\Big)y = 0.$$

Nalezněte všechna řešení na $(0, \infty)$ ve tvaru

$$x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Speciálně ukažte, že řešení lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
J_\nu(x) &= \Big(\frac{x}{2}\Big)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n}, \quad \nu \geq 0,\\
J_{-\nu}(x) &= \Big(\frac{x}{2}\Big)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n}, \quad \nu > 0, \nu \notin \mathbb{N},\\
J_{-\nu}(x) &= \Big(\frac{x}{2}\Big)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n}, \quad \nu \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

6. Ukažte, že pro $\nu \in \mathbb{N}_0$ je $J_\nu(x) = (-1)^\nu J_{-\nu}(x)$, zatímco pro $\nu \notin \mathbb{N}_0$ jsou tato řešení nezávislá.

7. Ukažte, že pro $\nu \in \mathbb{N}_0$ lze tyto funkce holomorfně prodloužit na celé $\mathbb{C}$, zatímco pro $\nu \notin \mathbb{N}_0$ lze funkce prodloužit na komplexní rovninu bez jedné polopřímky vycházející z počátku.

8. Ukažte, že pro $\nu \geq 0$

$$x^\nu (x^{-\nu} J_\nu(x))' = -J_{\nu+1}(x),$$

speciálně

$$J_0' = -J_1.$$

9. Ukažte, že

$$\begin{aligned}
J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,\\
J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,\\
J_{\frac{3}{2}}(x) &= -\sqrt{\frac{2x}{\pi}} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)'.
\end{aligned}$$