

Příklady na 3. a 4. týden

Laplaceova transformace

Vypočtete Laplaceovu transformaci následujících funkcí

1. $f(t) = t^\alpha, \quad \alpha > -1$
2. $f(t) = e^{\alpha t}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$
3. $f(t) = t \sin \omega t, \quad \omega \in \mathbb{C}$
4. $f(t) = t^n, \quad n \in \mathbb{N}$
5. Besselova funkce prvního druhu s indexem nula: $J_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$

U následujících funkcí nalezněte Laplaceův vzor

6. $F(p) = \frac{1}{p^2+3p+2}$
7. $F(p) = \frac{1}{p}$
8. $F(p) = \frac{\lambda}{p^2-\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$
9. $F(p) = \frac{p+1}{p^2-2p+1}$
10. $F(p) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}, \quad \alpha > 0, \sqrt{1} = 1$
11. $F(p) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}, \quad \alpha > 0, \sqrt{1} = 1$
12. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte $J_0 * J_0$.
13. Použitím věty o konvoluci dokažte vztah mezi funkcí beta a gama:
$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

14. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení rovnice

(a) $y'' + a^2y = b \sin ax, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad x \geq 0$

Pondělí: Borák, Hojnoš, Kassayová, Kotlařík, Liška, Poláček, Skácel, Slezák P.

Středa: Dušek, Novotný, Šestáková

(b) $y''' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0, \quad x \geq 0$

Pondělí: Čížek, Jiříček, Knob, Kouba, Mravcová, Ronovský, Skoupý, Slezák D.

Středa: Kepčija, Peštová, Vyháňková

(c) $y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = y'''(0) = 0, \quad x \geq 0.$

Pondělí, Středa: všichni ostatní

15. Mějme strunu, jejíž jeden konec leží v nekonečnu, druhý konec v bodě $x = 0$. Struna má v čase $t = 0$ nulovou výchylku Φ a nulovou počáteční rychlost Φ_t . Počínaje okamžikem $t = 0$ je konec $x = 0$ vychylován tak, že $\Phi(0, t) = f(t)$. Za předpokladu, že existuje Laplaceův obraz funkce $f(t)$, najděte výchylku $\Phi(x, t)$ pro $t > 0$.