Diferenční rovnice

Řešíme úlohu typu

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0,$$

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Naším cílem je najít takovou posloupnost a_n, která toto bude splňovat. Také bychom rádi použili Laplaceovu transformaci.

Na to ovšem potřebujeme nikoli posloupnost, ale funkci. Tedy definujme funkci

$$y(t) = a_n, \qquad n \le t < n+1.$$

Nyní můžeme diferenční rovnici přepsat na

$$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 0.$$

Spočítáme Laplaceovu transformaci jednotlivých částí:

$$\mathcal{L}(y(t+2)))(s) = \int_0^\infty e^{-st} y(t+2)\,\mathrm{d}t$$

po substituci $x = t+2$ máme

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st} y(t+2)\,\mathrm{d}t &= \int_2^\infty e^{-s(x-2)} y(x)\mathrm{d}x && (1)\\
&= e^{2s}\int_0^\infty e^{-sx} y(x)\mathrm{d}x - e^{2s}\int_0^2 e^{-sx} y(x)\mathrm{d}x && (2)\\
&= e^{2s}\mathcal{L}(y(t)) - e^{2s}\int_0^1 e^{-sx} a_0\mathrm{d}x - e^{2s}\int_1^2 e^{-sx} a_1\mathrm{d}x && (3)\\
&= e^{2s}\mathcal{L}(y(t)) - e^{2s}\left(\frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}\right), && (4)
\end{aligned}$$

použili jsme fakt, že $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Analogicky spočteme

$$\mathcal{L}(y(t+1))(s) = e^s \mathcal{L}(y(t)).$$

Nyní pokračujeme ve výpočtu běžným způsobem:

$$e^{2s}\mathcal{L}(y(t)) - \frac{e^s}{s}(1 - e^{-s}) - 3e^s\mathcal{L}(y(t)) + 2\mathcal{L}(y(t)) = 0,$$

tedy

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y(t)) &= \frac{e^s(1-e^{-s})}{s(e^{2s} - 3e^s + 2)} && (5)\\
&= \frac{e^s(1-e^{-s})}{s}\left(\frac{1}{e^s - 2} - \frac{1}{e^s - 1}\right) && (6)\\
&= \frac{1-e^{-s}}{s}\left(\frac{1}{1-2e^{-s}} - \frac{1}{1-e^{-s}}\right) && (7)\\
&= \frac{1-e^{-s}}{s(1-2e^{-s})} - \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-s})} && (8)\\
&= \mathcal{L}(2^{[t]}) - \mathcal{L}(1) && (9)
\end{aligned}$$

převedením zpět na posloupnost získáme

$$a_n = 2^n - 1.$$