7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1. Buď $a \in \mathcal{C}$.

1. Buď f holomorfní v a, g ať má v a jednoduchý pól. Potom
$$\operatorname{res}_a(fg) = f(a) \operatorname{res}_a(g).$$

2. Nechť f, g, jsou holomorfní v a, g ať má v a jednoduchý kořen. Pak
$$\operatorname{res}_a \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

3. Ať f má v a pól násobnosti $n \in \mathbb{N}$. Pak
$$\operatorname{res}_a f = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} [(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

Definice 2. Funkci $f(z)$ nazveme *holomorfní* v ∞, je-li funkce $f(1/z)$ holomorfní v 0. *Laurentovou řadou se středem v* ∞ rozumíme řadu
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$
přičemž její *regulární částí* rozumíme $\sum_{n=-\infty}^{0}$ (tedy tu část, která je holomorfní v ∞) a *hlavní částí* řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. *Reziduem v* ∞ rozumíme $-a_{-1}$.

Definice 3. Nechť je izolovaná singularita funkce f. *Reziduem* funkce f v bodě z_0 - píšeme $\operatorname{res}_{z_0} f$ nazýváme koeficient a_{-1} u $(z - z_0)^{-1}$ v Laurentově řadě f v bodě z_0.

Je-li ∞ izolovanou singularitou funkce f, pak reziduem v ∞ funkce f nazýváme $\operatorname{res}_\infty f = (-a_{-1})$, kde a_{-1} je koeficient u $(z - z_1)^{-1}$ v Laurentově řadě funkce f v bodě ∞. (Nezávisí na zvoleném z_1.)

Věta 4 (Reziduová)**.** Nechť Γ je jednoduše uzavřená křivka, probíhaná v kladném smyslu vzhledem ke svému vnitřku. Nechť dále jsou $a_1, a_2, \ldots, a_k$ body z jejího vnitřku. Je-li f holomorfní na $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$, pak je
$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{a_j} f.$$

Věta 5. Nechť f je holomorfní v $\mathcal{C}$ až na konečně mnoho izolovaných singularit $a_j \in \mathcal{C}$, $j = 1, 2, \dots k$. Pak je

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{a_j} f + \operatorname{res}_{\infty} f = 0.$$

Lemma 6. Je-li $z_0 \in \mathcal{C}$ izolovanou singularitou funkce f, pak je z_0 pólem f tehdy a jen tehdy, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ a funkce h holomorfní na $U(z_0)$, $h(z_0) \neq 0$, že platí

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} h(z),$$

pro $z \in U^*(z_0)$ (k je pak násobnost pólu).

Lemma 7. Nechť R je racionální funkce, která nemá póly na $\mathbb{R}$ a která nabývá na $\mathbb{R}$ pouze reálných hodnot. Nechť je holomorfní na množině $D := \{z \in \mathcal{C}; \Im z \geq 0\}$ s výjimkou konečné množiny M ležící uvnitř D. Nechť $\lim_{z \to \infty} R(z) = 0$. Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix} \mathrm{dx} = 2\pi i \sum_{w \in M} res_w R(z) e^{iz}$$

Lemma 8. Nechť R je racionální funkce, $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že stupeň Q je alespoň o 2 větší než stupeň P a Q nemá kořeny na reálné ose. Nechť M je množina všech kořenů Q, které mají kladnou imaginární část. Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \mathrm{dx} = 2\pi i \sum_{w \in M} res_w R(z)$$

Příklady

1. Spočtěte integrály

   (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+2x+5}$

   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^4+5x^2+4}$

   (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{dx}}{(x^2+1)(x^2+9)}$

   (d) $\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{dx}}{(x^2+1)(x^2+9)}$

   (e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{dx}}{(x^2+1)(x^2+4)}$

   (f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+5} \mathrm{dx}$

   (g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+5} \mathrm{dx}$

   (h) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2} \mathrm{dx}$

   (i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2} \mathrm{dx}$

   (j) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2-4x+5)^2} \mathrm{dx}$

   (k) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2-4x+5)^2} \mathrm{dx}$

   (l) $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+4} \mathrm{dx}$