11. cvičení, 19. 12. 2011

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/

Příklad

$$K(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ay^2} - e^{-by^2}}{y^2}\,\mathrm{d}y, \qquad a,b > 0$$

Chceme:

$$\frac{\partial K(a,b)}{\partial a}$$

Počítejme na dluh (druhé rovnítko)

$$\frac{\partial K(a,b)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty \frac{e^{-ay^2} - e^{-by^2}}{y^2}\,\mathrm{d}y \overset{*}{=} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{e^{-ay^2} - e^{-by^2}}{y^2} \right) \mathrm{d}y = - \int_0^\infty e^{-ay^2}\,\mathrm{d}y \overset{**}{=} \frac{-1}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$**$ značí tabulkovou hodnotu, kterou musíme znát. $*$ je dluh, používáme větu o prohození derivace a integrálu. Nyní začneme ověřovat předpoklady.

Nejprve rozebereme ingredience věty.

$$f(a,y) := \frac{e^{-ay^2} - e^{-by^2}}{y^2},$$

$J := (0,\infty)$, $I = (0,\infty)$. Problém spojitosti f je pouze u 0, kterážto nás ale nezajímá, neb bereme otevřený interval, tedy f je spojitá.

Nyní nás bude zajímat derivace f.

$$\frac{\partial f(a,y)}{\partial a} = \frac{-y^2 e^{-ay^2}}{y^2} = -e^{-ay^2}.$$

Derivaci bychom měli, hledáme majorantu. Fixujme $\delta > 0$, pak

$$|-e^{-ay^2}| < e^{-\delta y^2}$$

pro všechna $a \in (\delta, \infty)$. Aplikujeme nyní větu na $a \in (\delta, \infty)$. Zjišťujeme, že

$$\frac{\partial K(a,b)}{\partial a} = \frac{-1}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ježto to takto můžeme udělat pro všechna $\delta > 0$, vidíme, že

$$\frac{\partial K(a,b)}{\partial a} = \frac{-1}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

pro všechna $a \in (0,\infty)$.

Co jsme omylem spočetli na cvičení:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay^2} - e^{-by^2}}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-xy^2}}{y^2}\right]_a^b \mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xy^2}}{y^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^\infty \int_a^b -e^{-xy^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{Fub}{=} \int_a^b \int_0^\infty -e^{-xy^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{-\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}[\sqrt{x}]_a^b = \sqrt{\pi}(\sqrt{a} - \sqrt{b}).$$

Tento postup je nadmíru užitečný a správný (ověříme-li Fubínku), navíc můžeme zkontrolovat, že náš výpočet byl korektní, vyjde to stejně, když nyní spočteme vyjádřenou $K(a, b)$. Ovšem nezastírejme si, že je to zbytečně dlouhé a složité.