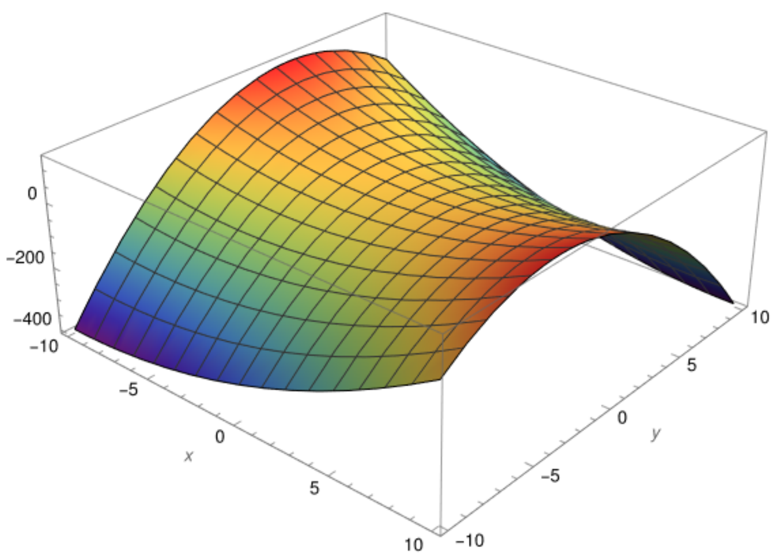
5. cvičení - Totální diferenciál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete definiční obor, parciální derivace a totální diferenciál následujících funkcí
   (a) $x^2 - 2xy - 3y^2$
   Řešení:
   Příklad i s řešením máme z: https://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_2.pdf
   Máme $D_f = \mathbb{R}^2$.
   Parciální derivace:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 6y.$$
   Obě parciální derivace jsou definované a spojité na celém $\mathbb{R}^2$. Tedy totální diferenciál existuje a je tvaru
$$f'(a)(h) = (2a_1 - 2a_2)h_1 + (-2a_1 - 6a_2)h_2.$$



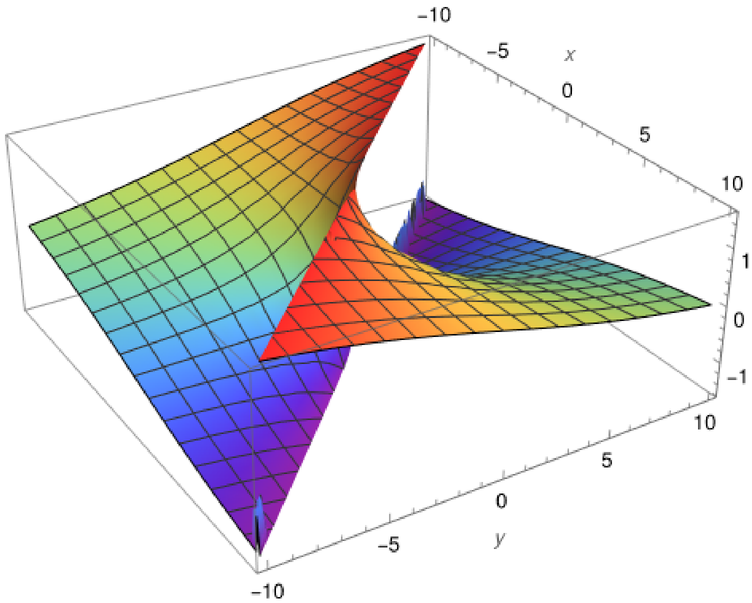
   (b) $\arctan \dfrac{x-y}{x+y}$ **Řešení:**
   Příklad i s řešením máme z: https://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_2.pdf
   Máme $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \neq -y\}$.

Parciální derivace na D_f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \frac{1(x+y)-1(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \frac{-1(x+y)-1(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

Obě parciální derivace jsou definované a spojité na celém D_f. Tedy totální diferenciál existuje na D_f a je tvaru

$$f'(a)(h) = \frac{a_2}{a_1^2+a_2^2}h_1 + \frac{-a_1}{a_1^2+a_2^2}h_2.$$



(c) $xy\log(x+y)$

Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_2.pdf

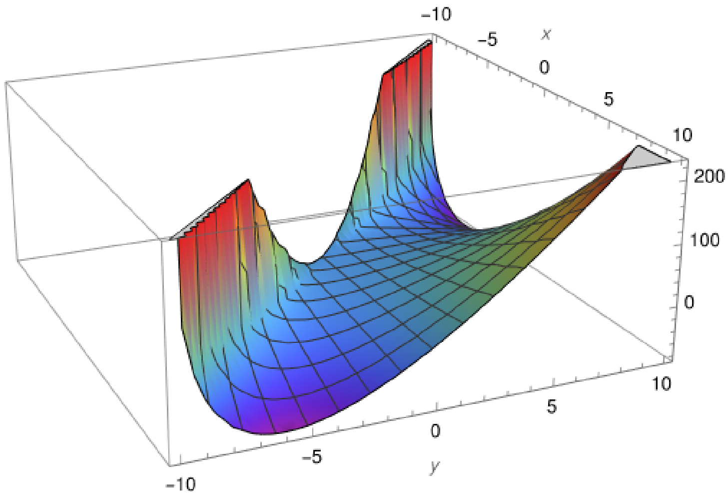
Máme $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\}$.

Parciální derivace na D_f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\log(x+y) + \frac{xy}{x+y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\log(x+y) + \frac{xy}{x+y}$$

Obě parciální derivace jsou definované a spojité na celém D_f. Tedy totální diferenciál existuje a je tvaru

$$f'(a)(h) = \left(a_2\log(a_1+a_2) + \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\right)h_1 + \left(a_1\log(a_1+a_2) + \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\right)h_2.$$



2. Určete parciální derivace a tot. diferenciál v bodě $(0,0)$:

   (a) $|y|\sin x$

   Stručnější řešení: 1. $D_f = \mathbb{R}^2$ (absolutní hodnota ani funkce sinus nedávají žádné podmínky).

   2. Parciální derivaci podle x v bodě $(0,0)$ lze určit přímým výpočtem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = (|y|\cos x)|_{(0,0)} = |0|\cos 0 = 0.$$

   Parciální derivaci podle y v bodě $(0,0)$ kvůli absolutní hodnotě u y určíme raději z definice parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|0+h|\sin 0 - |0|\sin 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

   3. Díky existenci parciálních derivací v bodě $(0,0)$ máme jediného kandidáta na totální diferenciál

$$\mathrm{d}f(0,0) \stackrel{?}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0).$$

   Nevíme, zda jsou parciální derivace v bodě $(0,0)$ spojité, proto ověříme (nebo vyvrátíme), že o totální diferenciál skutečně jde pomocí jeho definice. Chceme tedy ukázat (nebo vyvrátit), že

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))\cdot(h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2\|} = 0.$$

   Po dosazení na levou stranu a rozšířením h_1 dostaneme

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|h_2|\sin h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\underbrace{\frac{\sin h_1}{h_1}}_{\to 1}\cdot\frac{h_1|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Protože podle AG-nerovnosti platí odhady:

$$0 \leq \frac{|h_2 h_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{\frac{h_1^2+h_2^2}{2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0,$$

podle věty o dvou policajtech vyplývá

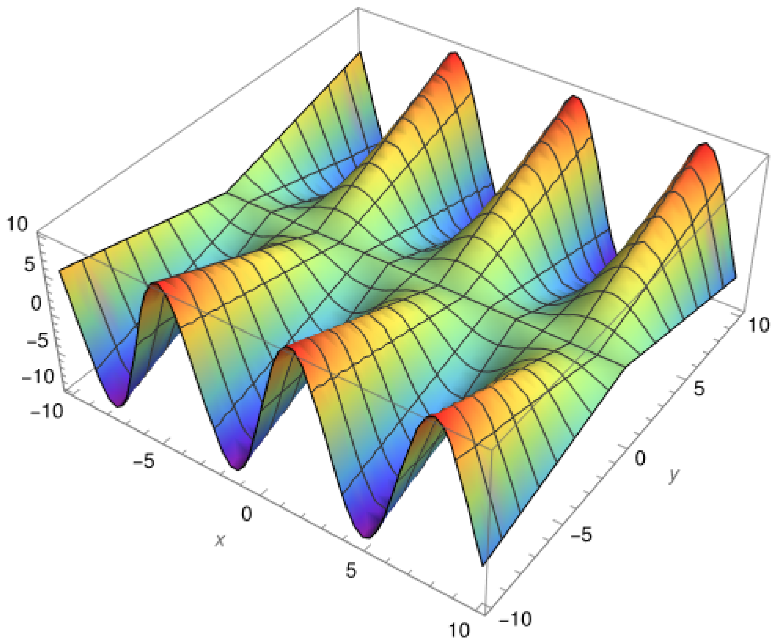
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_2 h_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Protože i ve více proměnných platí, že $\lim f = 0$, právě když $\lim |f| = 0$, je tedy také

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_2| h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 1 \cdot 0 = 0,$$

a tedy funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál

$$\mathrm{d}f(0,0) = (0,0).$$



Podrobnější řešení: *1. Určíme definiční obor.* Absolutní hodnota ani funkce sinus nám nedávají žádné podmínky, definičním oborem je tedy celé $\mathbb{R}^2$.

$$D_f = \mathbb{R}^2.$$

2. Spočteme parciální derivace. Pro parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ na celém $\mathbb{R}^2$ platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(|y| \sin x\right) = |y| \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin x\right) = |y| \cos x,$$

speciálně tedy $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = |0| \cos 0 = 0.$

Parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}$ na celém $\mathbb{R}^2$ kvůli absolutní hodnotě takto jednoduše spočítat nelze. Proto je výhodnější rovnou počítat z definice v bodě $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h|\sin 0 - |0|\sin 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

3. Určíme, zda funkce má či nemá totální diferenciál. Obě parciální derivace podle předchozího kroku existují. Jediným kandidátem na totální diferenciál je tedy (lineární zobrazení určené maticí 2×1)

$$\mathrm{d}f(0,0) \overset{?}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0).$$

Protože nevíme, zda je $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodě $(0,0)$ spojitá, zkusíme ověřit, zda se jedná o totální diferenciál funkce f v bodě $(0,0)$ pomocí definice totálního diferenciálu. Chceme tedy ověřit nebo vyvrátit, že

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))\cdot(h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2\|} = 0.$$

Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))\cdot(h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2\|} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_2|\sin h_1 - 0 - (0,0)\cdot(h_1,h_2)^T}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_2|\sin h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Nyní se můžeme zbavit sinu rozšířením h_1, neboť $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sin h_1}{h_1} = 1$. Podle věty o aritmetice limit

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_2|\sin h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sin h_1}{h_1} \cdot \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Chceme ukázat, že limita výše je rovna nule. K tomu stačí ukázat, že i v absolutní hodnotě je limita rovna nule, tedy že

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left|\frac{h_1|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \overset{?}{=} 0.$$

Absolutní hodnotou jsme si zjednodušili práci, protože nyní můžeme použít odhad plynoucí z AG-nerovnosti, která platí pro nezáporná čísla:

$$|h_1h_2| \leq \frac{h_1^2+h_2^2}{2},$$

a tudíž

$$0 \le \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{2} \xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0.$$

Podle věty o dvou policajtech pro limitu funkce více proměnných je tedy

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0,$$

tedy podle předchozího postupu také

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))\cdot(h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2\|} = 0,$$

což podle definice totálního diferenciálu znamená, že $\mathrm{d}f(0,0)=(0,0)$. □

(b) $\cos\sqrt[3]{xy}$

Řešení:

1. $D_f=\mathbb{R}^2$ (funkce kosinus ani třetí odmocnina nedávají žádné podmínky).
2. Parciální derivace v bodě $(0,0)$ přímým výpočtem určit nelze, neboť

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos\sqrt[3]{xy}) = -\sin(\sqrt[3]{xy})\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{(xy)^2}}\cdot y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos\sqrt[3]{xy}) = -\sin(\sqrt[3]{xy})\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{(xy)^2}}\cdot x,$$

kteréžto výrazy nejsou v bodě $(0,0)$ definované. Budeme tedy počítat z definice parciálních derivací.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\cos\sqrt[3]{(0+h)\cdot0}-\cos\sqrt[3]{0\cdot0}}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{1-1}{h} = \lim_{h\to0}\frac{0}{h} = 0.\end{aligned}$$

Obdobně

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\cos\sqrt[3]{0\cdot(0+h)}-\cos\sqrt[3]{0\cdot0}}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{1-1}{h} = \lim_{h\to0}\frac{0}{h} = 0.\end{aligned}$$

3. Díky existenci parciálních derivací máme jediného kandidáta na totální diferenciál, a tedy

$$\mathrm{d}f(0,0) \stackrel{?}{=} (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = (0,0).$$

Ověříme to (nebo vyvrátíme) pomocí definice totálního diferenciálu. Ptáme se tedy, zda

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))\cdot(h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2)\|} \stackrel{?}{=} 0.$$

Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\cos\sqrt[3]{(0+h_1)(0+h_2)} - 1 - (0,0)\cdot(h_1,h_2)^T}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\cos\sqrt[3]{(h_1h_2)} - 1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Pozor. Nyní si uvědomme, že pokud jdeme do nuly po přímkách $h_1 = 0$ nebo $h_2 = 0$, potom čitatel je nulový a limita rovna nule. V dalším tedy můžeme počítat limitu vzhledem k definičnímu oboru bez těchto os x a y, tedy vzhledem k množině

$$M := \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{\{(-\infty,+\infty)\times\{0\}\} \cup \{\{0\}\times(-\infty,+\infty)\}\Big\}.$$

Pokud i limita vzhledem k množině M vyjde nula, pak i původní limita počítaná vzhledem k celému definičnímu oboru bude rovna nule.
Důvodem této pasáže je, že pro odstranění kosinu budeme potřebovat rozšířit, a na osách by toto rozšíření selhalo.
Počítáme tedy nyní

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)_{(h_1,h_2)\in M}} \frac{\cos\sqrt[3]{(h_1h_2)} - 1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

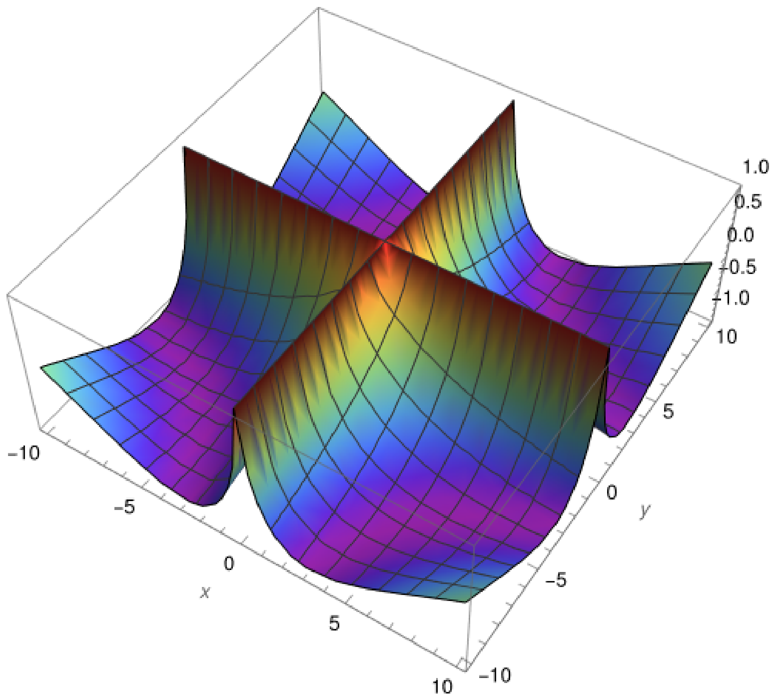
po rozšíření dostaneme

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)_{(h_1,h_2)\in M}} \underbrace{\frac{\cos\sqrt[3]{(h_1h_2)} - 1}{\sqrt[3]{(h_1h_2)^2}}}_{\to -1/2} \cdot \frac{\sqrt[3]{(h_1h_2)^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

První limita je rovna minus jedné polovině podle jednorozměrné limity $\lim_{z\to 0}\frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2}$ a věty o limitě složené funkce pro limity více proměnných, varianty (P), neboť existuje prstencové okolí P bodu $(0,0)$, pro které na $P\cap M$ je $0 < (h_1h_2)^2 < 2\pi$, a tedy $\cos\sqrt[3]{(h_1h_2)^2} \neq 1$. **Zde je právě důležité z množiny M vyloučit osy x a y.**
Podle AG-nerovnosti je pak $\sqrt[3]{(h_1h_2)^2} \leq (h_1^2+h_2^2)^{2/3}/\sqrt[3]{4}$, a tedy platí odhady

$$0 \leq \frac{\sqrt[3]{(h_1h_2)^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(h_1^2+h_2^2)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} \xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0.$$

Podle věty o dvou policajtech je tedy hledaná limita skutečně rovna nule (vzhledem k M; předtím jsme totéž ukázali i vůči ose x a ose y. Tedy to platí i vůči celému D_f), a tudíž funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál $\mathrm{d}f(0,0) = (0,0)$. $\square$



(c) $\sqrt{|x|^3+|y|^3}$

Řešení:

1. $D_f = \mathbb{R}^2$ (třetí odmocnina ani absolutní hodnota nedávají žádné podmínky).

2. Parciální derivace v bodě $(0,0)$ spočteme z definice. Počítáme-li naráz jednostranné limity zleva i zprava, dostáváme:

$$\lim_{h\to 0\pm} \frac{\sqrt{|0+h|^3+|0|^3}}{h} = \lim_{h\to 0\pm} \frac{|h|^{3/2}}{h} = \lim_{h\to 0\pm} \frac{|h|}{h} \cdot \lim_{h\to 0\pm} |h|^{1/2} = \pm 1 \cdot 0 = 0.$$

Obě jednostranné limity jsou si rovny, existuje tedy oboustranná. Z definice existuje tedy i parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, neboť

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|0+h|^3+|0|^3}}{h} = 0.$$

Analogicky pro $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\lim_{h\to 0\pm} \frac{\sqrt{|0|^3+|0+h|^3}}{h} = \lim_{h\to 0\pm} \frac{|h|^{3/2}}{h} = 0.$$

Opět, obě jednostranné limity jsou si rovny, existuje tedy oboustranná. Z definice existuje tedy i parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ a je $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3. Díky existenci parciálních derivací máme jediného kandidáta na totální diferenciál, a tedy

$$\mathrm{d}f(0,0) \stackrel{?}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0).$$

Ověříme to (nebo vyvrátíme) pomocí definice totálního diferenciálu. Ptáme se tedy, zda

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))\cdot(h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2)\|} \stackrel{?}{=} 0.$$

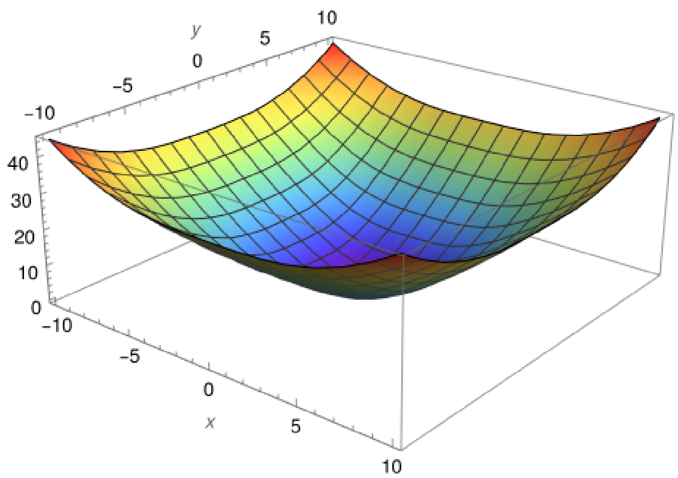
Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|0+h_1|^3+|0+h_2|^3}-0-(0,0)\cdot(h_1,h_2)^T}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|h_1|^3+|h_2|^3}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Nyní platí odhady:

$$0 \le \frac{\sqrt{|h_1|^3+|h_2|^3}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \frac{\sqrt{(|h_1|+|h_2|)(|h_1|^2+|h_2|^2)}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \sqrt{|h_1|+|h_2|} \xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0.$$

Podle věty o dvou policajtech je tedy hledaná limita rovne nule, a tudíž funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál $\mathrm{d}f(0,0)=(0,0)$. $\square$



(d) $\sqrt[3]{xy}$

Řešení:

1. $D_f = \mathbb{R}^2$.

2. Spočteme parciální derivace v bodě $(0,0)$. Budeme počítat z definice.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(0+h)0}-\sqrt[3]{0\cdot 0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0,$$

Analogicky

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

3. Díky existenci parciálních derivací máme jediného kandidáta na totální diferenciál, a tedy

$$\mathrm{d}f(0,0) \stackrel{?}{=} (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = (0,0).$$

Ověříme to (nebo vyvrátíme) pomocí definice totálního diferenciálu. Ptáme se tedy, zda

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))\cdot(h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2)\|} \stackrel{?}{=} 0.$$

Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h_1h_2}-0-(0,0)\cdot(h_1,h_2)^T}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h_1h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

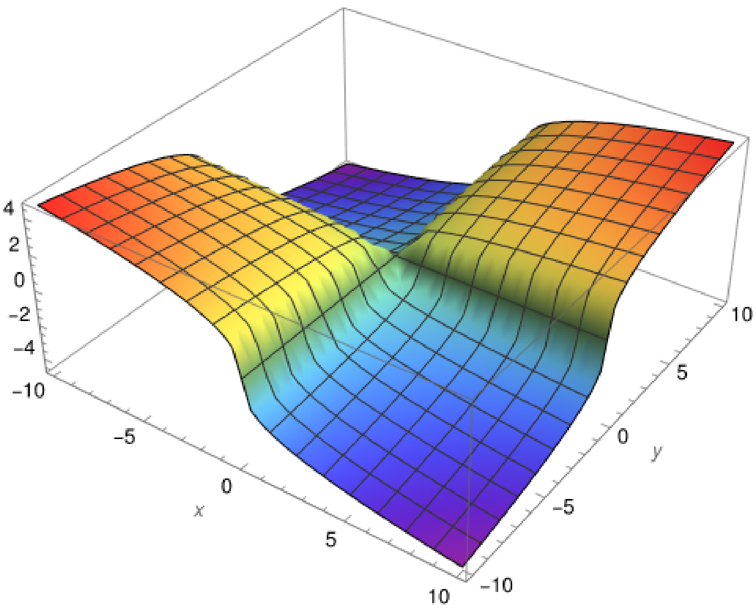
Tato limita ovšem neexistuje. Pro přímku $h_1 = 0$ máme

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{0\cdot h_2}}{\sqrt{0^2+h_2^2}} = 0,$$

zatímco pro přímku $h_1 = h_2$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h_2\cdot h_2}}{\sqrt{h_2^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{|h_2|}} = \infty.$$

Závěr: Totální diferenciál neexistuje.



(e) $f(x) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Řešení:

1. $D_f = \mathbb{R}^2$ (zlomek v sinu dává podmínku $x^2+y^2 \neq 0$, první výraz je tedy korektně definován všude kromě počátku; v počátku je však funkce dodefinována druhým řádkem).

Vsuvka: Není nutné ověřovat spojitost f v bodě $(0,0)$. Přesto se může hodit se nad tím zamyslet, neboť funkce, která není v bodě spojitá, nemůže mít v tomto bodě totální diferenciál.

Funkce f nicméně v bodě $(0,0)$ spojitá je. Plyne to z věty o dvou policajtech a jednoduchého odhadu

$$-(x^2+y^2) \leq f(x,y) \leq (x^2+y^2),$$

přičemž levá i pravá strana konvergují do nuly pro $(x,y) \to (0,0)$.

2. Spočteme parciální derivace v bodě $(0,0)$. Protože bod $(0,0)$ je od pohledu problematický, budeme počítat z definice.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^2+0^2)\sin\frac{1}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h^2} = 0,$$

podle věty o omezené krát nulové posloupnosti. Obdobně

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0^2+h^2)\sin\frac{1}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h^2} = 0.$$

3. Díky existenci parciálních derivací máme jediného kandidáta na totální diferenciál, a tedy

$$\mathrm{d}f(0,0) \stackrel{?}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0).$$

Ověříme to (nebo vyvrátíme) pomocí definice totálního diferenciálu. Ptáme se tedy, zda

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2) - f(0,0) - (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) \cdot (h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2)\|} \stackrel{?}{=} 0.$$

Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1^2+h_2^2)\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} - 0 - (0,0)\cdot(h_1,h_2)^T}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} \cdot \sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} = 0$$

opět podle věty o limitě omezené krát nulové posloupnosti (ovšem tentokrát pro funkce více proměnných). Tudíž funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál $\mathrm{d}f(0,0) = (0,0)$. □

Dodatek nepotřebný pro řešení úlohy: Funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál, přestože parciální derivace jsou v tomto bodě nespojité.
Máme totiž např., že

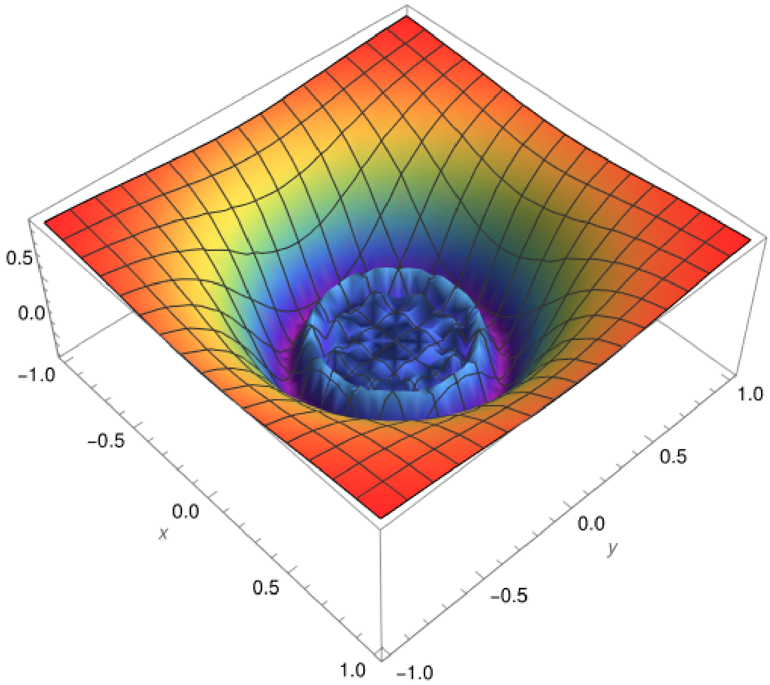
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Aby byla parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ v bodě $(0,0)$ spojitá, muselo by platit, že (dvojná) limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$. To ale není pravda, tato limita totiž neexistuje. Jděme např. do bodu $(0,0)$ po přímce $y=x$, tj. počítejme limitu

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(2\sin 12h^2 - \frac{1}{h}\cos 1h^2\right).$$

Limita napravo zjevně neexistuje, $\frac{\partial f}{\partial x}$ tedy nemůže být spojitá v bodě $(0,0)$. Dokázat lze například z Heineho věty. Pokud volíme například posloupnost $h_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, potom $\cos\frac{1}{h^2} = \cos(2\pi n) = 1$, $\sin\frac{1}{2h^2} = \sin(\pi n) = 0$, a tedy $\lim \frac{\partial f}{\partial x}(h_n,h_n) = -\infty$. Naopak, volíme-li $h_n = \frac{1}{\sqrt{\pi+2\pi n}}$, pak $\cos\frac{1}{h^2} = \cos(\pi+2\pi n) = -1$, $\sin\frac{1}{2h^2} = \sin(\pi/2+\pi n) = 0$, a tedy $\lim \frac{\partial f}{\partial x}(h_n,h_n) = +\infty$.



3. Dodefinujte funkci $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.
Řešení:
Příklad i s řešením máme z: Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy, Holický, Kalenda

- Funkce je definována na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Musíme ji tedy dodefinovat v počátku. Aby měla totální diferenciál, musí být dodefinována spojitě. Uvažujme např. limitu po přímce $y = 0$.
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \frac{0}{x^2+0} = 0.$$
Kandidátem na dodefinování je tedy pouze 0.
Dále pracujeme s funkcí
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
(Pozn.: Zatím nevíme, zda je takto dodefinovaná funkce opravdu spojitá,)
- V bodech $(x,y) \neq (0,0)$ spočteme parciální derivace.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y(x^2+y^2) - x^3y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3(x^2+y^2) - x^3y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
Protože obě parciální derivace jsou spojité na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, tak tam funkce má totální diferenciál tvaru
$$f'(x,y)(h_1,h_2) = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}h_1 + \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}h_2.$$

- Parciální derivace v bodě $(0,0)$ spočteme z definice.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3\cdot 0}{t^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0^3\cdot t}{t^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

- Kandidátem na totální diferenciál v bodě $(0,0)$ je tedy zobrazení

$$f(0,0)(h_1,h_2) = 0h_1 + 0h_2.$$

Ověříme z definice, tedy se ptáme, zda:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))\cdot(h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2)\|} = 0.$$

Konkrétně tedy

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1^3 h_2}{h_1^2+h_2^2}-0-0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^3 h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Použijeme odhad

$$2|h_1h_2| \le h_1^2 + h_2^2$$

Pak

$$\left|\frac{h_1^3 h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| = \left|\frac{h_1^2}{(h_1^2+h_2^2)}\right| \cdot \left|\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \le \left|\frac{h_1^2}{h_1^2}\right| \cdot \left|\frac{1}{2}\frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

Protože (ze spojitosti)

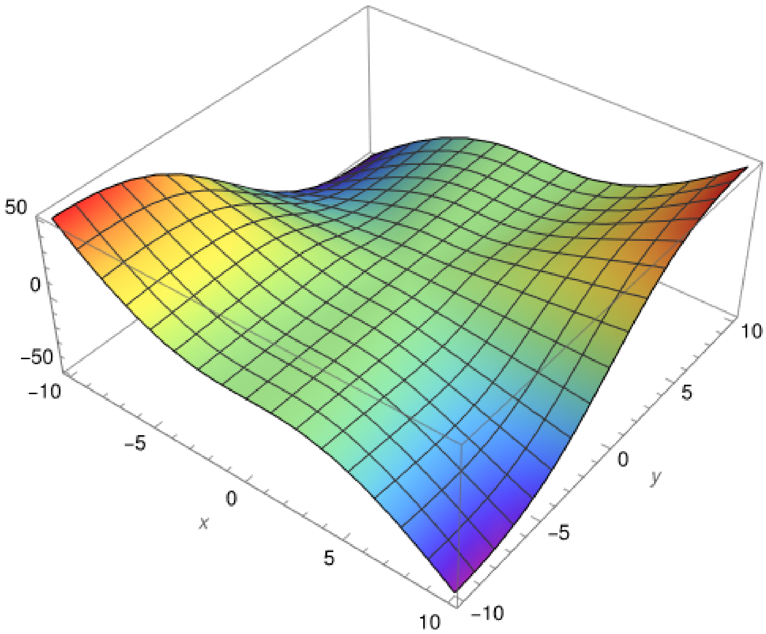
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{2}\sqrt{h_1^2+h_2^2} = 0,$$

tak i (ze 2 policajtů)

$$\left|\frac{h_1^3 h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| = 0.$$

Tedy jsme ověřili, že totální diferenciál v počátku opravdu je tvaru

$$f(0,0)(h_1,h_2) = 0h_1 + 0h_2.$$



4. Dodefinujte funkci $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.
Řešení:
Příklad i s řešením máme z: https://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching/dif_pocet_vice_prom.pdf

- Funkce je definována na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Musíme ji tedy dodefinovat v počátku. Aby měla totální diferenciál, musí být dodefinována spojitě. Uvažujme např. limitu po přímce $y = 0$.
$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \frac{0}{\sqrt{x^2+0}} = 0.$$
Kandidátem na dodefinování je tedy pouze 0.
Dále pracujeme s funkcí
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
- V bodech $(x,y) \neq (0,0)$ spočteme parciální derivace.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} = \frac{y^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$$
Protože obě parciální derivace jsou spojité na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, tak tam funkce má totální diferenciál tvaru
$$f'(x,y)(h_1,h_2) = \frac{y^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} h_1 + \frac{x^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} h_2.$$

- Parciální derivace v bodě $(0,0)$ spočteme z definice.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot 0}{\sqrt{t^2+0}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t|t|} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t}{\sqrt{0+t^2}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t|t|} = 0.$$

- Kandidátem na totální diferenciál v bodě $(0,0)$ je tedy zobrazení

$$f(0,0)(h_1,h_2) = 0h_1 + 0h_2.$$

Ověříme z definice, tedy se ptáme, zda:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2) - f(0,0) - (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) \cdot (h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2)\|} = 0.$$

Konkrétně tedy

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}$$

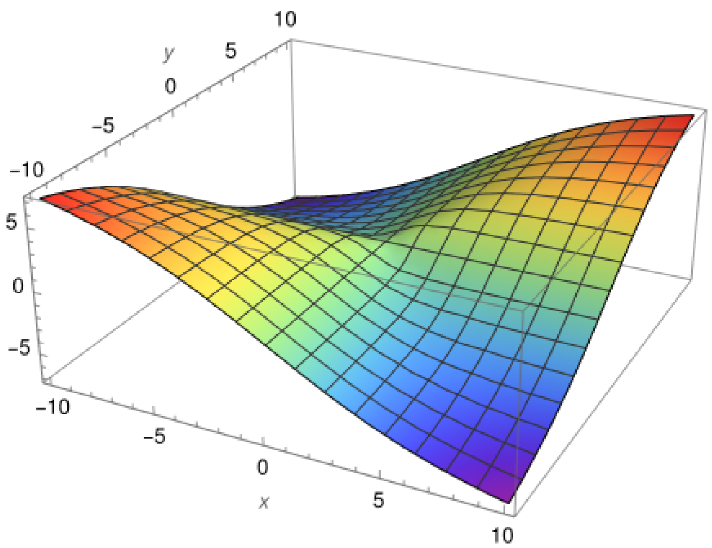
Tato limita neexistuje, protože pro přímku $h_2 = h_1$ dostáváme

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{h_1^2}{h_1^2+h_1^2} = \frac{1}{2}$$

ale pro $h_2 = 0$ je

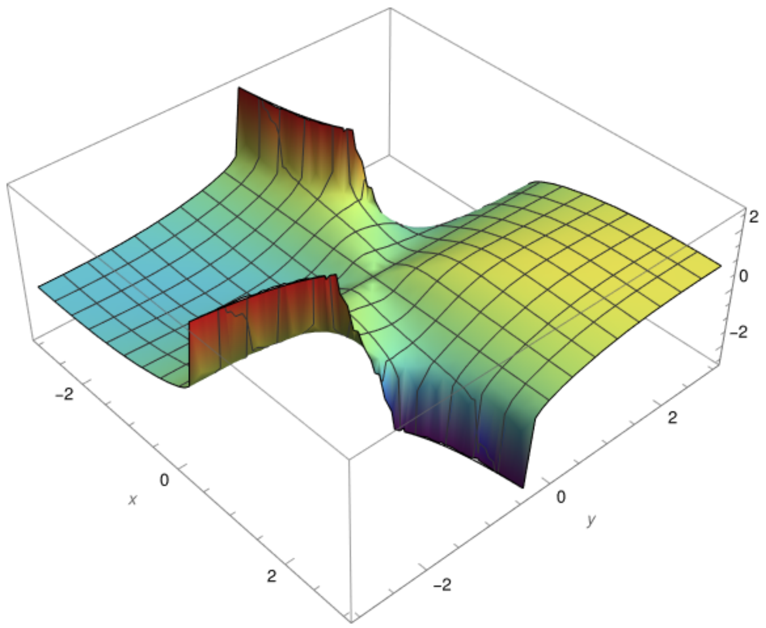
$$\lim_{h_1\to 0} \frac{0}{h_1^2} = 0.$$

Tedy jsme ověřili, že totální diferenciál v počátku neexistuje.



5. Lze dodefinovat funkci $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}\ln(1+xy)$ na nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla totální diferenciál?
Řešení: Příklad i s řešením máme z: Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy, Holický, Kalenda

- Funkce xy je spojitá na $\mathbb{R}^2$ a v počátku má hodnotu 0, tedy existuje takové prstencové δ-okolí počátku, že $xy > -1$. Tedy na tomto okolí je funkce f dobře definována.
Musíme ji nyní dodefinovat v počátku. Aby měla totální diferenciál, musí být dodefinována spojitě. Uvažujme např. limitu po přímce $y = 0$.
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \frac{x}{x^2}\log(1+0) = 0.$$
Kandidátem na dodefinování je tedy pouze 0.
Dále pracujeme s funkcí
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}\log(1+xy), & (x,y) \in B((0,0),\delta)\setminus\{(0,0)\},, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
- Parciální derivace v bodě $(0,0)$ spočteme z definice.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t+0}{t^2+0^2}\log(1+t\cdot 0)-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{0+t}{0^2+t^2}\log(1+0\cdot t)-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0.$$
- Kandidátem na totální diferenciál v bodě $(0,0)$ je tedy zobrazení
$$f(0,0)(h_1,h_2) = 0h_1 + 0h_2.$$
Ověříme z definice, tedy se ptáme, zda:
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))\cdot(h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2)\|} = 0.$$
Konkrétně tedy
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\frac{h_1+h_2}{h_1^2+h_2^2}\log(1+h_1h_2)-0-0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{(h_1+h_2)\log(1+h_1h_2)}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$
Pro přímku $h_2 = h_1$ dostáváme
$$\lim_{h_1\to 0+}\frac{2h_1\log(1+h_1^2)}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{h_1\to 0+}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\log(1+h_1^2)}{h_1^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
Tedy kýžená limita nemůže být rovna 0, tedy totální diferenciál v počátku neexistuje.



6. Ověřte z definice totální diferenciál funkce $x^2 + y^2$ v bodě $[x_0, y_0]$.
Řešení:
Příklad i s řešením máme z: https://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching/dif_pocet_vice_prom.pdf

- Na $\mathbb{R}^2$ máme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

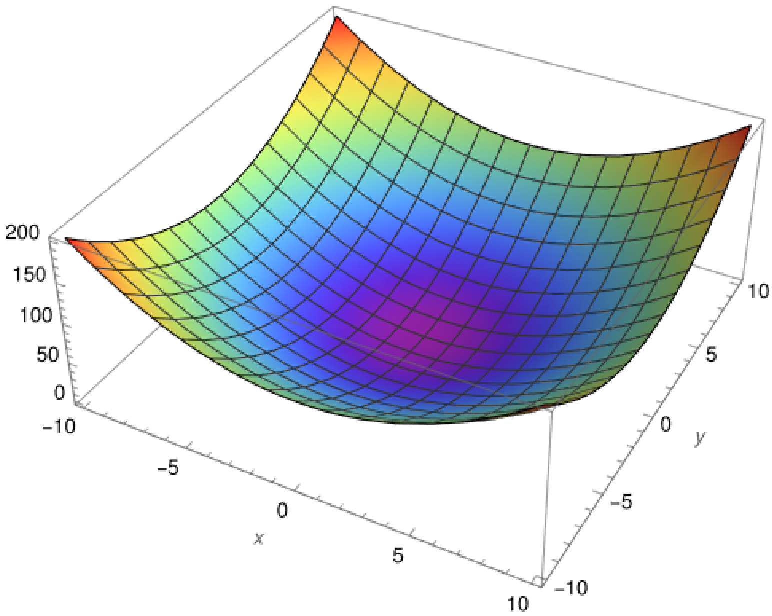
- Kandidátem na totální diferenciál v bodě (x_0, y_0) je tedy zobrazení

$$f(x_0, y_0)(h_1, h_2) = 2x_0h_1 + 2y_0h_2.$$

Počítáme tedy limitu

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(x_0+h_1)^2 + (y_0+h_2)^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0h_1 - 2y_0h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} = 0,
\end{aligned}$$

což bylo ukázati.


200
150
100
50
0
−10
−5
0
x
5
10
−10
−5
0
y
5
10