



## 4. cvičení - Parciální derivace

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Teorie

**Definice 1.** Parciální derivací funkce  $f$  v bodě  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  podle proměnné  $x_i$  definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}.$$

**Definice 2.** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $a \in G$ ,  $f \in C^1(G)$ . Pak graf funkce

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a)$$

$x \in \mathbb{R}^n$  se nazývá *tečnou nadrovinou* ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[a, f(a)]$ .

**Věta 3.** Nechť je funkce  $f(x, y)$  diferencovatelná v bodě  $A = [x_0; y_0]$ . Pak v bodě  $[x_0; y_0; f(x_0; y_0)]$  existuje tečná rovina ke grafu funkce  $z = f(x, y)$  určená rovnicí

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)(y - y_0).$$

### Algoritmus - jak upočítat parciální derivace funkce $f(x, y)$

1. Určíme **definiční obor**  $f(x, y)$ .
2. Spočteme parciální **derivace mechanicky** tam, kde to jde.
3. Identifikujeme **problematické body** - funkce je tam definovaná, ale mechanické derivování nefunguje. Dáváme pozor na
  - (a) kraje definičního oboru původní funkce;
  - (b) body, kde je funkce definovaná, ale mechanické derivování ne (např. funkce  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ );
  - (c) místa, kde je funkce definovaná po částech;
  - (d) funkce: absolutní hodnota, sgn, odmocniny, arcsin a arccos...
4. Zafixujeme jeden konkrétní problematický bod  $[x_0, y_0]$  a z **definice** spočítáme parciální derivaci. (Jde o limitu s 1 proměnnou, vše krom  $t$  je vlastně parametr.)
5. Typicky vyjde limita závislá na parametru - diskutujeme výsledek vzhledem k tomu parametru (podezřelému bodu  $[x_0, y_0]$ ).
6. Uděláme **závěr**, kde všude derivace existují a kolik vyjdou.
7. Poznámky:
  - (a) Parciální derivace lze počítat pouze tam, kde je definovaná původní funkce.
  - (b) Parciální derivace je limita (na řezu) - lze ji počítat pouze tam, kde existuje správné okolí bodu. (Např.  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  je definovaná na kruhu. Parciální derivace v krajních bodech (na kružnici) spočítat nelze, protože se tam není jak „přiblížit“.)

### Příklady

1. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete  $D_f$  a  $D_{f'}$ .

- (a)  $f(x, y) = 35x - 4y^2 + 6xy$  (f)  $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$   
 (b)  $f(x, y) = \frac{\sin y^2}{x}$  (g)  $f(x, y) = (x + y)^x$   
 (c)  $f(x, y) = xy \tan\left(\frac{x}{y}\right)$  (h)  $f(x, y) = 3\sqrt[5]{xy^2}$   
 (d)  $f(x, y) = x^y$  (i)  $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+y}{x-y}$   
 (e)  $f(x, y) = xe^{xy}$  (j)  $f(x, y) = \operatorname{arccot} \frac{x+y}{x-y}$

### Příklady - zkouškové

Zdroj: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/vyuka.php>

2. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete  $D_f$  a  $D_{f'}$ , napište rovnici tečné roviny v bodě  $a$
- (a)  $f(x, y) = |x^2 - y^2|$ ,  $a = [1, 2]$   
 (b)  $f(x, y) = e^{x^2-y} + 7y + |xy|$ ,  $a = [1, 2]$   
 (c)  $f(x, y) = \sqrt{y + \sin x}$ ,  $a = [0, 1]$   
 (d)  $f(x, y) = \min\{x^2 + y^2; 2 - x^2 - y^2\}$ ,  $a = [1, 2]$   
 (e)  $f(x, y) = \sqrt[3]{\ln \frac{x}{y}}$ ,  $a = [1, 2]$   
 (f)  $f(x, y) = x^{(y^x)}$ ,  $a = [1, 2]$   
 (g)  $f(x, y) = (\arctan \sqrt{x^2 + y^2})^4$ ,  $a = [1, 2]$   
 (h)  $f(x, y) = \begin{cases} \sin(x \cos y), & x \geq 0 \\ \cos(x \sin y) + 2, & x < 0 \end{cases}$ ,  $a = [1, 2]$

### Bonusové příklady

3. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete  $D_f$  a  $D_{f'}$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

4. Nechť  $T$  je tečná rovina ke grafu funkce  $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$ , která je kolmá k přímce  $\{(t, t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$ . Ve kterém bodě protíná  $T$  osu  $z$  (přímku  $\{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$ )?

Pozn.: Normála ke grafu funkce je určena rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)t \\ y &= y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)t \\ z &= z_0 - t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$$

(2b) Z definice derivujících je  $g = |xy|$   
 $\sqrt{z} = |z|$   
 $e^{\ln a} = a$  (2f)  $\cos t = -\cos t$