2. cvičení - Metrické prostory

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1

Definice 1. *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici (X, ρ), kde X je množina, $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(1) $\forall x, y \in X: \ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

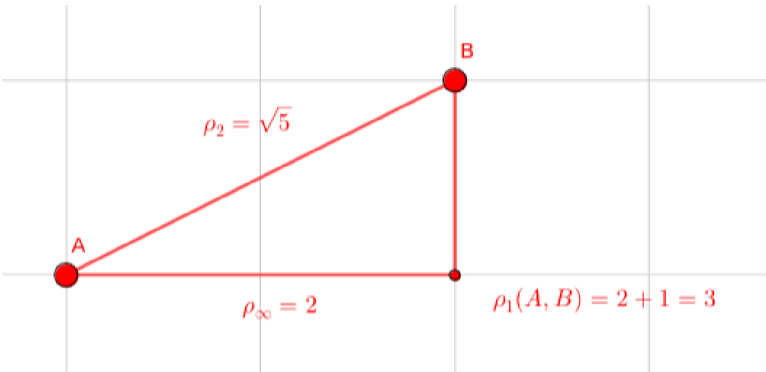
(2) $\forall x, y \in X: \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(3) $\forall x, y, z \in X: \ \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Funkci ρ nazýváme *metrika na* X.

Poznámka 2. Množinu $\mathbb{R}^n$ uvažujeme s metrikami

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|, \quad \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$



Úloha 3. Určete, zda jsou následující objekty metrickým prostorem:

1. Na prostoru $\mathbb{C}([0, 2])$ spojitých funkcích na $[0, 2]$ uvažujme

$$\rho(f, g) = |f(1) - g(1)|.$$

   Řešení: Nesplňuje 1. podmínku, funkce $f = x$ a $g = x^2$ mají nulovou vzdálenost, ale nejsou totožné. Tzv. *pseudometrika.*

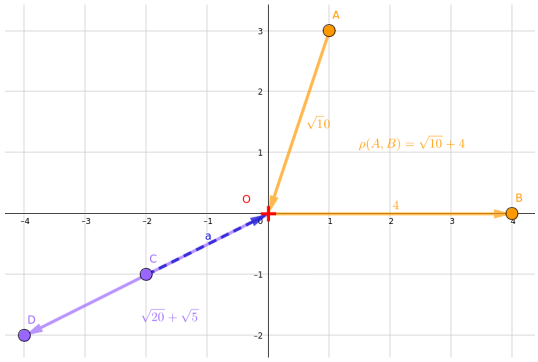
2. Na $\mathbb{R}$ uvažujme

$$\rho(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ 1, & x < y. \end{cases}$$

   Řešení: Nesplňuje symetrii. Tzv. *kvazimetrika.*

3. Prostor $\mathbb{R}^2$ s funkcí $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = \rho_2(x, x_0) + \rho_2(x_0, y)$, $x \neq y$, kde x_0 značí počátek $(0, 0)$ a ρ_2 značí eukleidovskou metriku v $\mathbb{R}^2$. Při měření vzdálenosti dvou různých bodů musíme vždy projít počátkem.

1



Řešení: Ano, jedná se o metriku.

4. Taxi: Vzdálenost dvou míst v Praze měříme jako nejkratší možnou dráhu ujetou autem.
   Řešení: Není symetrická - kvůli jednosměrkám.

Definice 4. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, a $x \in X$. *Vzdáleností bodu x od množiny A* rozumíme číslo

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y);\ y \in A\}.$$

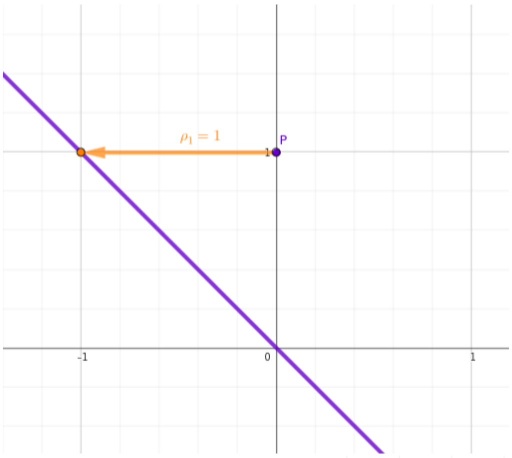
Úloha 5. Na $\mathbb{R}^2$ najděte vzdálenost bodu $P = [0, 1]$ od přímky $y = -x$ v metrice

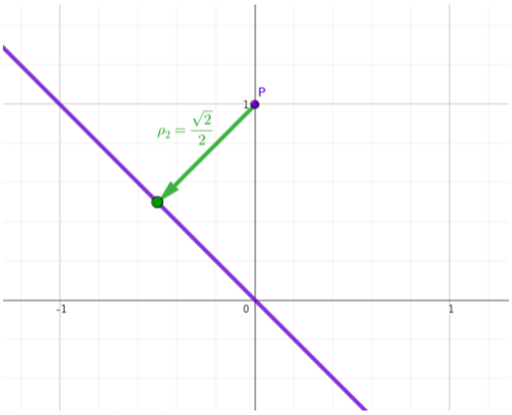
1. ρ_1
2. ρ_2
3. ρ_∞

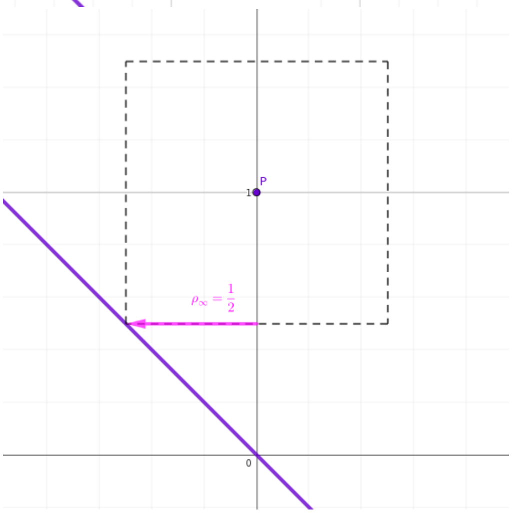
Řešení:

Zdroj: https://is.muni.cz/th/143424/fi_b/cd-priloha/skripta/mp/metricke-prostory-pro-obrazovku.pdf?so=nx

1







Úloha 6. V prostoru $\mathbb{C}([0,1])$ uvažujeme supremovou metriku

$$\rho_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Najděte nejmenší vzdálenost funkce $f(x) = x$ od podprostoru tvořeného konstantními funkcemi.

Řešení: Uvažujme konstantní funkci $g(x) = k$. Pak

$$\rho_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |x - k|.$$

Nejmenší hodnoty dosáhneme pro $k = \frac{1}{2}$, pak $\rho_\infty(f,g) = \frac{1}{2}$.
Hejblátko v geogebře: https://www.geogebra.org/calculator/veyfkghz
Zdroj: https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf

Poznámka 7. Nechť $p \in [1,\infty)$ a l_p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}.$$

Poznámka 8. Uvažujme množinu všech **omezených** reálných posloupností $\{x_n\}$ Pak definujeme metriku

$$\rho_\infty(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 9. Určete vzdálenost posloupnosti $x = \{1, 2, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots\}$ od množiny $M = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_1 = x_2\}$ v prostorech

1. l_1
2. l_2
3. l_∞

Zdroj: https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf
Řešení:

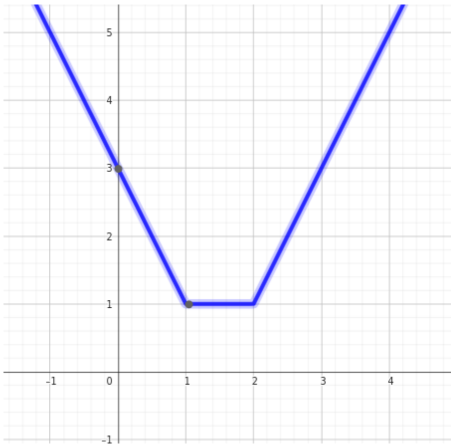
1. Uvažujme posloupnost $y = \{y_1, y_1, y_3, y_4 \dots\}$. Pak

$$\rho_1(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|.$$

Tato $\rho_1(x,y)$ bude nejmenší v situaci, kdy $x_n = y_n$ pro $n \geq 3$. Pak

$$\rho_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + 0 + 0 + \cdots = |1 - y_1| + |2 - y_1|.$$

Tedy hledáme minimum funkce $f(y_1) = |1 - y_1| + |2 - y_1|$. Z grafu získáme minimum (např.) v bodě $y_1 = 1$ a hodnotu $\rho_1(x,y) = |1-1| + |2-1| = 1$.



2. Analogicky. Uvažujme posloupnost $y = \{y_1, y_1, y_3, y_4 \ldots\}$. Pak

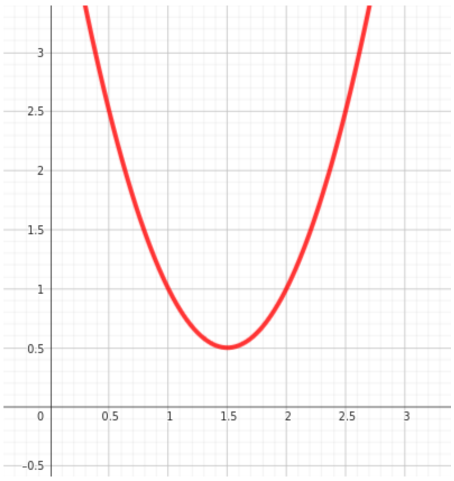
$$\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(x_n - y_n)^2}.$$

Tato $\rho_2(x,y)$ bude nejmenší v situaci, kdy $x_n = y_n$ pro $n \geq 3$. Pak

$$\rho_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + 0 + 0 + \cdots} = \sqrt{(1 - y_1)^2 + (2 - y_1)^2}.$$

Tedy hledáme minimum funkce $f(y_1) = \sqrt{(1-y_1)^2 + (2-y_1)^2}$. Stačí najít minimum funkce $g(y_1) = (1-y_1)^2 + (2-y_1)^2$.

Zderivováním získáme minimum v bodě $y_1 = \frac{3}{2}$ a hodnotu $\rho_2(x,y) = \sqrt{(1-\frac{3}{2})^2 + (2-\frac{3}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



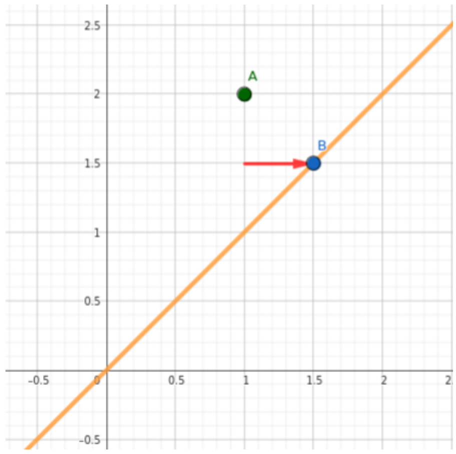
3. Analogicky. Uvažujme posloupnost $y = \{y_1, y_1, y_3, y_4 \ldots\}$. Pak

$$\rho_\infty(x,y) = \sup |x_n - y_n|.$$

Tato $\rho_\infty(x,y)$ bude nejmenší v situaci, kdy $x_n = y_n$ pro $n \geq 3$. Pak

$$\rho_\infty(x,y) = \sup\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, 0, 0, \ldots = \max\{|1 - y_1|, |2 - y_1|\}.$$

Tedy hledáme minimum funkce $f(y_1) = |1 - y_1| + |2 - y_1|$. Minimum dostaneme v bodě $y_1 = \frac{3}{2}$ a hodnotu $\rho_\infty(x, y) = \frac{1}{2}$. (Srovnejte s Úlohou 5.3)



2

Definice 10. Nechť $x \in X$, $r > 0$. *Otevřenou koulí* rozumíme množinu

$$B(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) < r\}$$

Uzavřenou koulí rozumíme množinu

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) \leq r\}$$

Úloha 11. Načrtněte jednotkovou kouli v prostoru (R^3, ρ_1), (R^3, ρ_2), (R^3, ρ_∞).
Řešení:

Úloha 12. Jak vypadá koule v diskrétním metrickém prostoru?
Řešení: V diskrétní metrice závisí koule na poloměru. Je-li $r \leq 1$, splyne koule se svým středem: $B(x, r) = \{x\}$. Pro $r > 1$ se koule bude rovnat celému prostoru: $B(x, r) = X$.

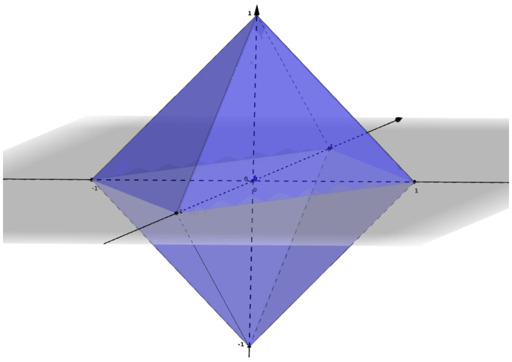
Definice 13. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků X. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje* k $y \in X$ v (X, ρ), jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y) = 0$. Prvek y nazýváme *limitou posloupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ v (X, ρ). *Konvergentní posloupností v* (X, ρ) rozumíme každou posloupnost prvků X, která má limitu v (X, ρ).

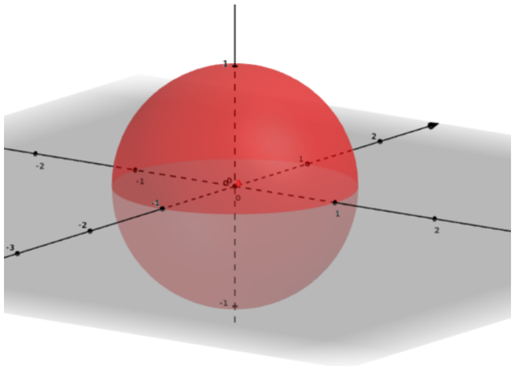
Definice 14. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$. Řekneme, že množina M je *uzavřená* v X, jestliže platí: pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v M, splňující $x_n \to x$ pro nějaký prvek $x \in X$, pak platí: $x \in M$.

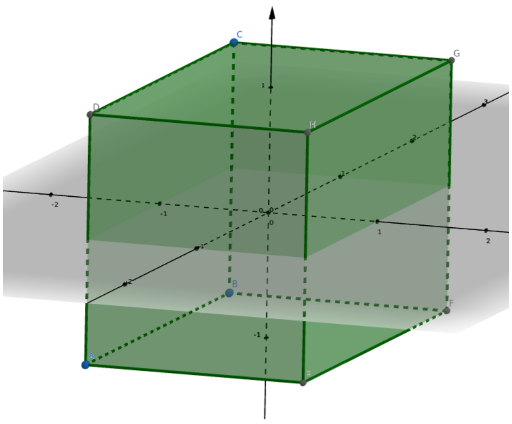
Definice 15. Nechť $M \subset X$, $x \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *vnitřním bodem množiny* M, jestliže existuje $r > 0$ splňující $B(x, r) \subset M$.

Množina $M \subset X$ se nazývá *otevřená v* (X, ρ), jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

2







Poznámka 16.
1. Množina F v metrickém prostoru (X, ρ) je uzavřená právě tehdy, když $X \setminus F$ je otevřená.
2. Množina G v metrickém prostoru (X, ρ) je otevřená právě tehdy, když $X \setminus G$ je uzavřená.

Úloha 17. Určete, zda je interval $(0, 1)$ otevřená či uzavřená množin v metrickém prostoru (X, ρ), jestliže

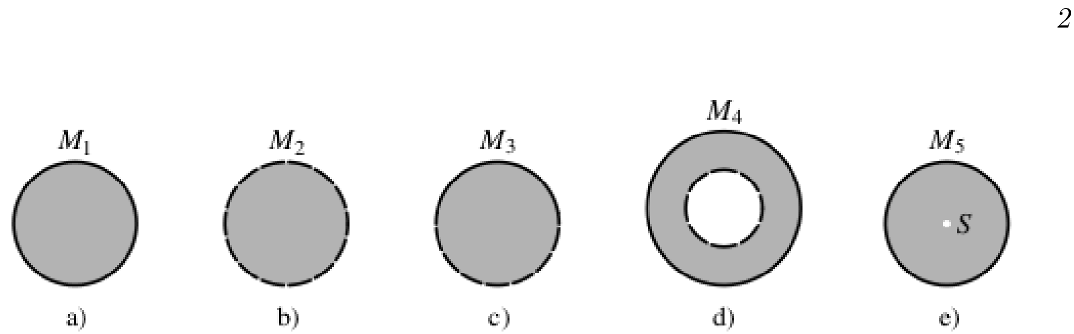
1. $X = (0, 1)$, $\rho = \rho_1$,
   Řešení: Otevřená i uzavřená, protože celý prostor je vždy otevřený i uzavřený.
2. $X = \mathbb{R}$, $\rho = \rho_1$,
   Řešení: Otevřená.
3. $X = [0, 1]$ s diskrétní metrikou,
   Řešení: Otevřená i uzavřená. Každá podmnožina diskrétního metrického prostoru je otevřená i uzavřená.
4. $X = (0, 1) \cup (3, 4)$, $\rho = \rho_1$.
   Řešení: Otevřená i uzavřená. Otevřená - každému bodu lze opsat malou kouli, která se vejde do intervalu $(0, 1)$. Uzavřená - Stačí ukázat, že $(3, 4)$ je otevřená (to se ukáže stejně). Doplněk pak musí být uzavřená.

Definice 18. Nechť $M \subset X$. Řekneme, že x je *hraničním bodem množiny* M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů nazýváme *hranice* a značíme ji ∂M.

Uzávěrem množiny M rozumíme množinu $\overline{M} = M \cup \partial M$.

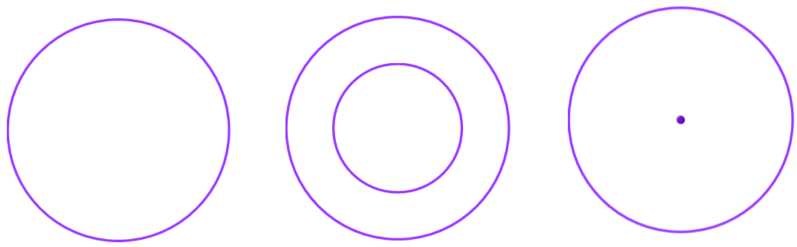
Úloha 19. Určete, zda množina M je uzavřená, otevřená, co je její vnitřek, uzávěr, hranice (v $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou):

1. $M = (0, 1)$
   Řešení: Otevřená. $\operatorname{Int} M = (0, 1)$ ($\operatorname{Int} M$ značí vnitřek/všechny vnitřní body M). $\overline{M} = [0, 1]$. $\partial M = \{0, 1\}$.
2. $M = [0, 1]$
   Řešení: Uzavřená. $\operatorname{Int} M = (0, 1)$ $\overline{M} = [0, 1]$. $\partial M = \{0, 1\}$.
3. $M = (0, 1]$
   Řešení: Ani otevřená, ani uzavřená. $\operatorname{Int} M = (0, 1)$ $\overline{M} = [0, 1]$. $\partial M = \{0, 1\}$.
4. $M = (0, \infty)$
   Řešení: Otevřená. $\operatorname{Int} M = (0, \infty)$ $\overline{M} = [0, \infty)$. $\partial M = \{0\}$.
5. $M = [0, \infty)$
   Řešení: Uzavřená. $\operatorname{Int} M = (0, \infty)$ $\overline{M} = [0, \infty)$. $\partial M = \{0\}$.
6. $M = (-\infty, \infty)$
   Řešení: Otevřená i uzavřená. $\operatorname{Int} M = (-\infty, \infty)$ $\overline{M} = (-\infty, \infty)$. $\partial M = \emptyset$.
7. $\mathbb{N}$
   Řešení: Uzavřená. $\operatorname{Int} M = \emptyset$. $\overline{M} = \mathbb{N}$. $\partial M = \mathbb{N}$.
8. $\mathbb{Q}$
   Řešení: Ani uzavřená, ani otevřená. $\operatorname{Int} M = \emptyset$. $\overline{M} = \mathbb{R}$. $\partial M = \mathbb{R}$.



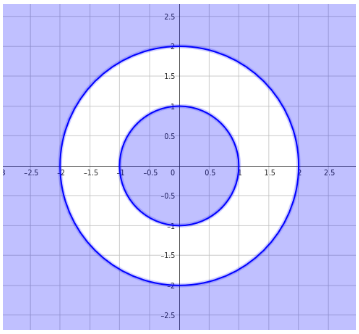
9. $\mathbb{R}$
   Řešení: Otevřená i uzavřená. $\operatorname{Int} M = \mathbb{R}$. $\overline{M} = \mathbb{R}$. $\partial M = \emptyset$.

Úloha 20. Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, najděte hranici (v $\mathbb{R}^2$).
Řešení: Množina (a) je uzavřená, množina (b) otevřená, množiny (c-e) ani jedno.
Hranice: Pro (a-c) jde o kružnici. Pro (d) o dvě kružnice, pro (e) kružnice a bod.



Úloha 21. Rozhodněte, zda platí (v obecném metrickém prostoru):

1. $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$
   Řešení: Zdroj: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf
   Platí $\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r)$.
   Důkaz: Nechť $x \in X$, $r > 0$. Zvolme $y \in \partial B(x,r)$. Pro spor předpokládejme, že $y \notin \overline{B}(x,r)$. Tedy $\rho(x,y) > r$.
   Položme $s = \rho(x,y) - r > 0$.
   Pak pro každé $z \in B(y,s)$ platí
   $$\rho(x,z) \geq \rho(x,y) - \rho(y,z) > \rho(x,y) - s = r.$$
   Tedy $z \notin B(x,r)$. Pak ale $B(y,s) \cap B(x,r) = \emptyset$. Což je spor s definicí hranice.
   Opačná inkluze neplatí. Uvažujme metrický prostor
   $$\mathbb{R}^2 \setminus \{1 < x^2 + y^2 < 4\}$$
   Pak $\overline{B(o,2)} = \overline{B}(o,1) \neq \overline{B}(o,2)$



2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   Řešení: Nikoli. Např. $A = (0,1)$, $B = (1,2)$. Pak $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, ale $\overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [1,2] = \overline{\{1\}} = \{1\}$.

Úloha 22. Najděte uzávěry grafů funkcí v $\mathbb{R}^2$

1. $$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
   Řešení: Graf samotný sjednocen s úsečkou $\{[0,y], y \in [-1,1]\}$.
2. Dirichletova funkce
   Řešení: Osa x a přímka $y = 1$.
3. Riemannova funkce
   Řešení: Graf sjednocený s osou x.

Úloha 23. Najděte netriviální $A \subset \mathbb{R}$, aby splňovala následující

1. $\overline{A} = \partial A$
   Řešení: $\{1\}$
2. $\operatorname{Int} \overline{A} \supsetneq A$
   Řešení: $\mathbb{Q}$
3. $\operatorname{Int} \overline{A} \subsetneq A$
   Řešení: $[0,1)$
4. $\overline{\operatorname{Int} A} \subsetneq A$
   Řešení: $\mathbb{Q}$
5. $\overline{\operatorname{Int} A} \supsetneq A$
   Řešení: $(0,42]$
6. $\overline{\operatorname{Int} A} = A$
   Řešení: $[-3,5]$

3

Poznámka 24. Funkce $f(x,y) = x$ a $f(x,y) = y$ jsou spojité na $\mathbb{R}^2$. Obecně spojitost funkcí na $\mathbb{R}^n$ je zachována aritmetickými operacemi (krom dělení 0) i skládáním.

Úloha 25. Pečlivě zdůvodněte, že následující funkce jsou spojité (na svém D_f):

1. $\arctan(x^2+y^2)$
   Řešení: Funkce $f(x,y)=x$ a $f(x,y)=y$ jsou spojité (vizte poznámku). Jejich součiny jsou také spojité, tedy máme spojitost , x^2 a y^2. Součet spojitých funkcí je také spojitý. Funkce $f(z)=\arctan z$ je také spojitá a tedy složení funkcí $\arctan x^2+y^2$ je také spojité na $\mathbb{R}^2$.
2. $\sin \dfrac{xy}{x^2-y^3}$
   Řešení: Funkce $f(x,y)=x$ a $f(x,y)=y$ jsou spojité (vizte poznámku). Jejich součiny jsou také spojité, tedy máme spojitost xy, x^2 a y^3. Rozdíl a podíl spojitých funkcí (pakliže nedělíme 0) je také spojitý, máme tedy spojitost funkce $\frac{xy}{x^2-y^3}$ na množině $[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2\neq y^3$. Funkce $f(z)=\sin z$ je také spojitá a tedy složení funkcí $\sin\frac{xy}{x^2-y^3}$ je také spojité na $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2\neq y^3\}$.
3. $\log(e^{|x^2-y^2|}+1)$
   Řešení: Analogicky. Spojitá na $\mathbb{R}^2$.
4. $(x+y)^{xy}$
   Řešení: Přepíšeme jako $e^{xy\log(x+y)}$. Definičním oborem pak je $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x+y>0\}$. Pak už postupujeme analogicky.

Úloha 26. Nechť $f(x)=x^2$. Najděte vzory množin:

1. $\{4\}$
   Řešení: Z grafu: $\{-2,2\}$
2. $(0,9)$
   Řešení: $(-3,0)\cup(0,3)$
3. $[0,9)$
   Řešení: $(-3,3)$
4. $[1,9]$
   Řešení: $[-3,-1]\cup[1,3]$
5. $(-2,\infty)$
   Řešení: $\mathbb{R}$
6. $\{-4\}$
   Řešení: $\emptyset$

Úloha 27. Nechť $f(x)=\sin x$. Najděte vzory množin:

1. $\{1\}$
   Řešení: $\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
2. $(-1,1)$
   Řešení: $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
3. $[0,1)$
   Řešení: Položme $A:=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[0+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, $B:=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\pi+2k\pi]$. Vzorem je pak množina $A\cup B$.

4. $(-2,-1]$
   Řešení: $\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
5. $(-\infty,-3]$
   Řešení: $\emptyset$

Poznámka 28. Nechť (X,ρ) a (Y,σ) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$ je spojité zobrazení. Pak pro otevřenou množinu G v (Y,σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (X,ρ) a pro uzavřenou množinu F v (Y,σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (X,ρ).

Úloha 29. Určete, zda jsou následující množiny otevřené nebo uzavřené a pečlivě zdůvodněte:

1. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^3 \leq 2\}$
   Řešení: Definujme funkci $f(x,y) = x^2 - y^3$. Funkce je spojitá (násobení a rozdíl spojitých). Dále uvažujme interval $(-\infty,2]$, který je uzavřený. Množina pak je rovna $f^{-1}((-\infty,2])$, tedy vzoru uzavřeného intervalu při spojitém zobrazení. Tedy je uzavřená.
2. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \arctan(x^2+y^2) > 1\}$
   Řešení: $f(x,y) = \arctan(x^2+y^2)$, interval $I = (1,\infty)$ je otevřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je otevřená.
3. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -3 < e^{|x^2-y^2|} < 2\}$
   Řešení: $f(x,y) = e^{|x^2-y^2|}$, interval $I = (-3,2)$ je otevřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je otevřená.
4. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3, x+y \leq 2\}$
   Řešení: $f(x,y) = x+y$, interval $I = (-\infty,2]$ je uzavřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je uzavřená.
   Dále $g(x,y) = x$, interval $J = [0,1]$ je uzavřená množina. Tedy $g^{-1}(J)$ je uzavřená.
   Dále $h(x,y) = y$, interval $K = [-3,3]$ je uzavřená množina. Tedy $h^{-1}(K)$ je uzavřená.
   Dohromady: průnik 3 uzavřených je uzavřená.

Úloha 30. Určete, zda jsou následující množiny omezené:

1. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 3\}$
   Řešení: Ano, přímo z definice se vejde do koule $B(0,\sqrt{3})$.
2. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} < 10\}$
   Řešení: Ne. Uvažujme např. množinu: $y = 1$ a $x > 1$.
3. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 \leq 1\}$
   Řešení: Ano, neb $x^2+y^2 \leq x^2+2y^2 \leq 1$.
4. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \sin(xy) \leq 1\}$
   Řešení: Ne, nerovnost je splněna pro celou rovinu.
5. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^6+y^6 < 2\}$
   Řešení: Ano, platí $|x| < 2$ a $|y| < 2$, což je čtverec, který je jistě omezená množina.
6. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{xy}{x^2+y^2} < \dfrac{1}{2}\}$
   Řešení: Ne. Máme $2xy \leq x^2+y^2$ tedy $0 \leq^2 -2xy+y^2$, což je $0 \leq (x-y)^2$. Tedy nerovnici splňuje celá rovina krom přímky $x = y$. Tedy nejde o omezenou množinu.