2. cvičení - Metrické prostory

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1

Definice 1. *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici (X, ρ), kde X je množina, $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(1) $\forall x, y \in X : \ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

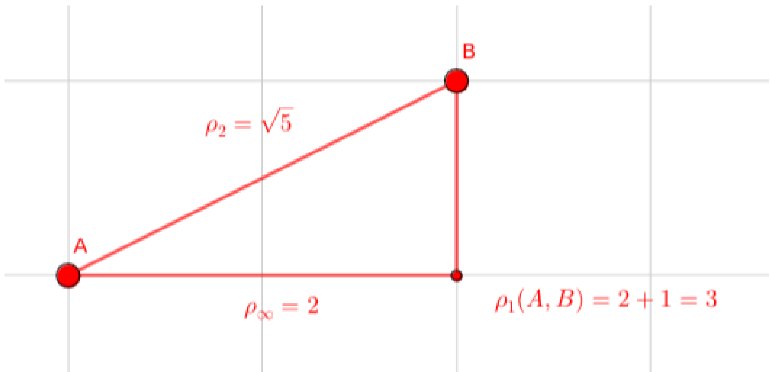
(2) $\forall x, y \in X : \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(3) $\forall x, y, z \in X : \ \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Funkci ρ nazýváme *metrika na* X.

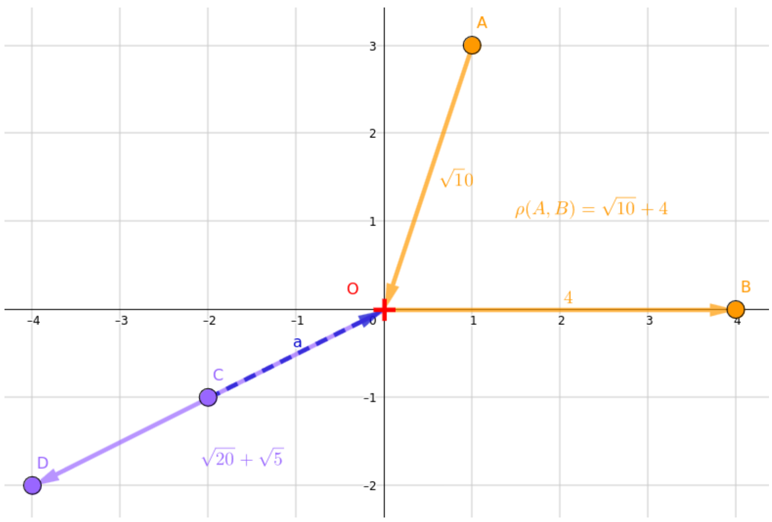
Poznámka 2. Množinu $\mathbb{R}^n$ uvažujeme s metrikami

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|, \quad \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$



Úloha 3. Určete, zda jsou následující objekty metrickým prostorem (precizní důkaz není třeba)

1. Na prostoru $\mathbb{C}([0, 2])$ spojitých funkcích na $[0, 2]$ uvažujme
$$\rho(f, g) = |f(1) - g(1)|.$$
2. Na $\mathbb{R}$ uvažujme $\rho(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ 1, & x < y. \end{cases}$
3. Prostor $\mathbb{R}^2$ s funkcí $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = \rho_2(x, x_0) + \rho_2(x_0, y)$, $x \neq y$, kde x_0 značí počátek $(0, 0)$ a ρ_2 značí eukleidovskou metriku v $\mathbb{R}^2$. Při měření vzdálenosti dvou různých bodů musíme vždy projít počátkem.
4. Taxi: Vzdálenost dvou míst v Praze měříme jako nejkratší možnou dráhu ujetou autem.



Definice 4. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, a $x \in X$. *Vzdáleností bodu x od množiny A* rozumíme číslo

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y);\ y \in A\}.$$

Úloha 5. ❄ Na $\mathbb{R}^2$ najděte vzdálenost bodu $P = [0, 1]$ od přímky $y = -x$ v metrice

1. ρ_1
2. ρ_2
3. ρ_∞

Zdroj: https://is.muni.cz/th/143424/fi_b/cd-priloha/skripta/mp/metricke-prostory-pro-obrazovku.pdf?so=nx

Úloha 6. ✿ V prostoru $\mathbb{C}([0, 1])$ uvažujeme supremovou metriku

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Najděte nejmenší vzdálenost funkce $f(x) = x$ od podprostoru tvořeného konstantními funkcemi.

Hejblátko v geogebře: https://www.geogebra.org/calculator/veyfkghz

Zdroj: https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf

Poznámka 7. Nechť $p \in [1, \infty)$ a l_p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}.$$

Poznámka 8. Uvažujme množinu všech **omezených** reálných posloupností $\{x_n\}$ Pak definujeme metriku

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 9. ✾ Určete vzdálenost posloupnosti $x = \{1, 2, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots\}$ od množiny $M = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_1 = x_2\}$ v prostorech

1. l_1
2. l_2
3. l_∞

Zdroj: https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf

2

Definice 10. Nechť $x \in X$, $r > 0$. *Otevřenou koulí* rozumíme množinu

$$B(x,r) = \{y \in X; \rho(x,y) < r\}$$

Uzavřenou koulí rozumíme množinu

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in X; \rho(x,y) \leq r\}$$

Úloha 11. Načrtněte jednotkovou kouli v prostoru (R^3, ρ_1), (R^3, ρ_2), (R^3, ρ_∞).

Úloha 12. Jak vypadá koule v diskrétním metrickém prostoru?

Definice 13. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků X. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje* k $y \in X$ v (X, ρ), jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y) = 0$. Prvek y nazýváme *limitou posloupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ v (X, ρ). *Konvergentní posloupností v* (X, ρ) rozumíme každou posloupnost prvků X, která má limitu v (X, ρ).

Definice 14. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$. Řekneme, že množina M je *uzavřená* v X, jestliže platí: pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v M, splňující $x_n \to x$ pro nějaký prvek $x \in X$, pak platí: $x \in M$.

Definice 15. Nechť $M \subset X$, $x \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *vnitřním bodem množiny* M, jestliže existuje $r > 0$ splňující $B(x,r) \subset M$.

Množina $M \subset X$ se nazývá *otevřená v* (X, ρ), jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Poznámka 16.
1. Množina F v metrickém prostoru (X, ρ) je uzavřená právě tehdy, když $X \setminus F$ je otevřená.
2. Množina G v metrickém prostoru (X, ρ) je otevřená právě tehdy, když $X \setminus G$ je uzavřená.

Úloha 17. Určete, zda je interval $(0,1)$ otevřená či uzavřená množin v metrickém prostoru (X, ρ), jestliže

1. $X = (0,1)$, $\rho = \rho_1$,
2. $X = \mathbb{R}$, $\rho = \rho_1$,
3. $X = [0,1]$ s diskrétní metrikou,
4. $X = (0,1) \cup (3,4)$, $\rho = 3\rho_1$.

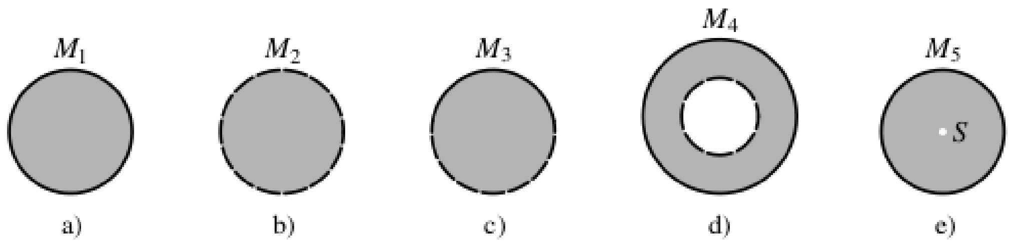
Definice 18. Nechť $M \subset X$. Řekneme, že x je *hraničním bodem množiny* M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x,r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x,r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů nazýváme *hranice* a značíme ji ∂M.

Uzávěrem množiny M rozumíme množinu $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Úloha 19. Určete, zda množina M je uzavřená, otevřená, co je její vnitřek, uzávěr, hranice (v $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou):

1. $M = (0,1)$
2. $M = [0,1]$
3. $M = (0,1]$
4. $M = (0,\infty)$
5. $M = [0,\infty)$
6. $M = (-\infty,\infty)$
7. $\mathbb{N}$
8. $\mathbb{Q}$
9. $\mathbb{R}$

Úloha 20. Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, najděte hranici (v $\mathbb{R}^2$).



Úloha 21. Rozhodněte, zda platí (v obecném metrickém prostoru):

1. ❀ $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$
2. ★ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Úloha 22. Najděte uzávěry grafů funkcí

1. $$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
2. Dirichletova funkce
3. Riemannova funkce

https://www.geogebra.org/calculator/zapw8zma
https://cs.wikipedia.org/wiki/Dirichletova_funkce
https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemannova_funkce

Úloha 23. Najděte netriviální $A \subset \mathbb{R}$, aby splňovala následující

1. $\overline{A} = \partial A$
2. $\operatorname{Int} \overline{A} \supsetneq A$
3. $\operatorname{Int} \overline{A} \subsetneq A$
4. $\overline{\operatorname{Int} A} \subsetneq A$
5. $\overline{\operatorname{Int} A} \supsetneq A$
6. $\overline{\operatorname{Int} A} = A$

3

Poznámka 24. Funkce $f(x,y)=x$ a $f(x,y)=y$ jsou spojité na $\mathbb{R}^2$. Obecně spojitost funkcí na $\mathbb{R}^n$ je zachována aritmetickými operacemi (krom dělení 0) i skládáním.

Úloha 25. Pečlivě zdůvodněte, že následující funkce jsou spojité (na svém D_f):

1. $\sin\dfrac{xy}{x^2-y^3}$
2. $\arctan(x^2+y^2)$
3. $\ln(e^{|x^2-y^2|}+1)$
4. $(x+y)^{xy}$

Úloha 26. Nechť $f(x)=x^2$. Najděte vzory množin:

1. $\{4\}$
2. $(0,9)$
3. $[0,9)$
4. $[1,9]$
5. $(-2,\infty)$
6. $\{-4\}$

Úloha 27. Nechť $f(x)=\sin x$. Najděte vzory množin:

1. $\{1\}$
2. $(-1,1)$
3. $[0,1)$
4. $(-2,-1]$
5. $(-\infty,-3]$

Poznámka 28. Nechť $(X,\rho$ a (Y,σ) jsou metrické prostory a $f:X\to Y$ je spojité zobrazení. Pak pro otevřenou množinu G v (Y,σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (X,ρ) a pro uzavřenou množinu F v (Y,σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (X,ρ).

Úloha 29. Určete, zda jsou následující množiny otevřené nebo uzavřené a pečlivě zdůvodněte:

1. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^3\le 2\}$
2. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : \arctan(x^2+y^2)>1\}$
3. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : -3<e^{|x^2-y^2|}<2\}$
4. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, -3\le y\le 3, x+y\le 2\}$

Definice 30. Množina $M\subset X$ se nazývá *omezená*, jestliže $\exists K\ \mathrm{diam}(M)<K$.

Úloha 31. Určete, zda jsou následující množiny omezené:

1. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<3\}$
2. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y}<10\}$
3. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2+2y^2\le 1\}$
4. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : \sin(xy)\le 1\}$
5. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^6+y^6<2\}$
6. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{xy}{x^2+y^2}<\dfrac{1}{2}\}$

(5) Nakreslete si obrázek. Jak se vlastně měří vzdálenost v daných metrikách?
(6) Použijte hejblátko.
(9) Vzdálenost dvou bodů je nejmenší, když jsou přesně stejné. To tady asi nepůjde, ale nemohly by být stejné skoro na všech souřadnicích?
(21.1) Uvažujte $\mathbb{R}^2$ bez mezikruží.
(21.2) Uvažujte $(0,1)$ a $(1,2)$.