1. cvičení - Definiční obory

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete a zakreslete definiční obor dané funkce

   (a) $f(x, y) = \sqrt{x^3y^3}$

   Řešení:

   Kvůli definičnímu oboru funkce $\sqrt{t}$ potřebujeme

$$0 \leq x^3y^3,$$

   neboli

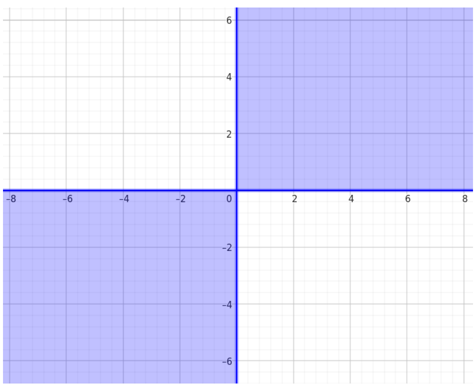
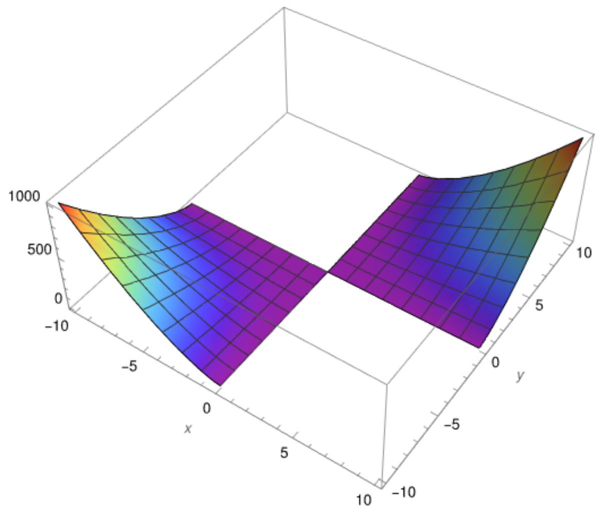
$$0 \leq xy.$$

   Tedy

$$(y \geq 0 \wedge x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge x \leq 0).$$

   Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 0 \wedge x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge x \leq 0).\}$$

   (b) $f(x, y) = \arcsin(x + y)$

   Řešení:

   Kvůli definičnímu oboru funkce arcsin potřebujeme

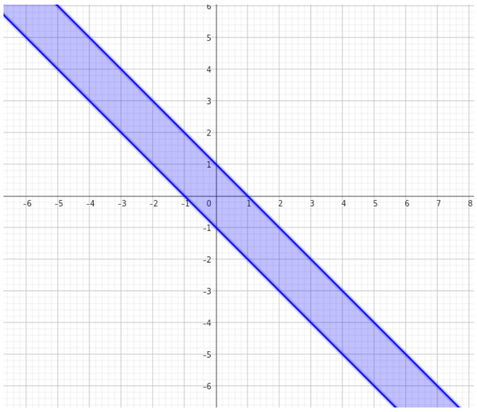
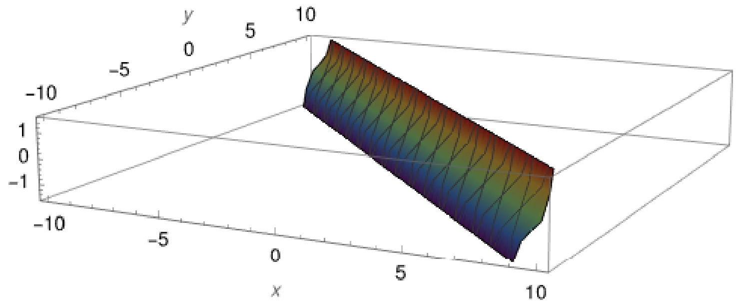
$$-1 \leq x + y \leq 1$$

   tedy

$$y \leq 1 - x, \qquad -1 - x \leq y.$$

   Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x, \ -1 - x \leq y.\}$$

(c) $f(x,y) = \sqrt{9-(x^2+y^2)} + \sqrt{x^2+y^2-4}$
Řešení:
Kvůli definičnímu oboru funkce $\sqrt{t}$ potřebujeme

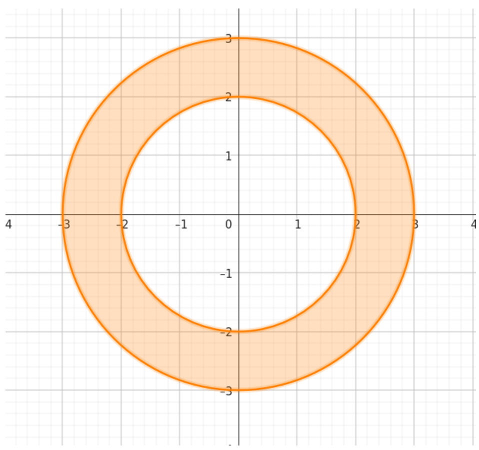
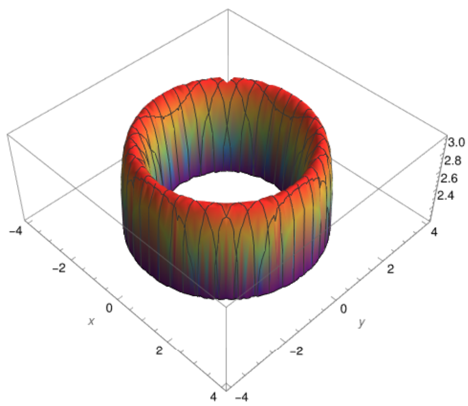
$$0 \le 9-(x^2+y^2) \wedge x^2+y^2-4 \ge 0$$

tedy

$$4 \le x^2+y^2 \le 9.$$

Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2+y^2 \le 9\}$$

(d) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1) + \ln(16-x^2-16y^2)$
Řešení:
Kvůli definičnímu oboru funkce ln potřebujeme

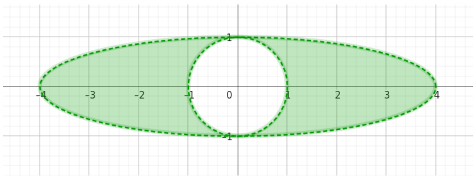
$$x^2+y^2-1 > 0 \wedge 16-x^2-16y^2 > 0$$

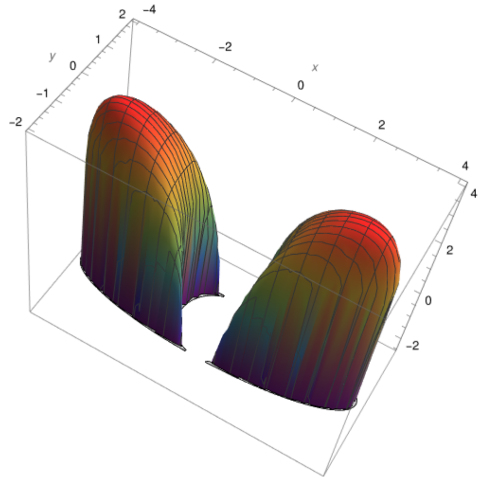
tedy

$$x^2+y^2 > 1 \wedge 16 > x^2+16y^2$$

Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1 \wedge 16 > x^2+16y^2\}$$





(e) $f(x,y) = \arcsin(xy)$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce arcsin potřebujeme

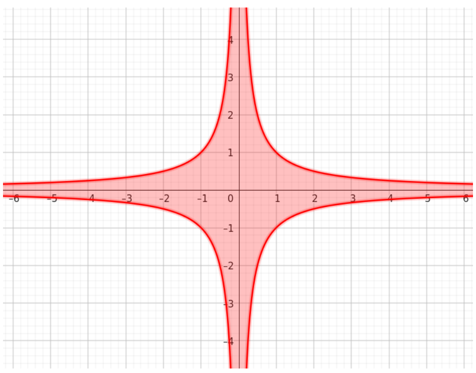
$$-1 \leq xy \leq 1$$

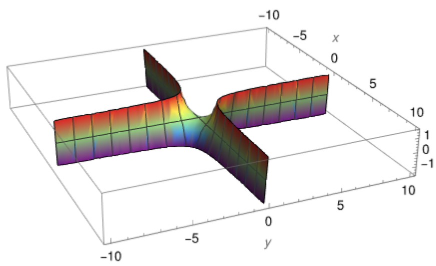
Uvažujme případy

- pro $x = 0$ jsou nerovnosti splněny.
- pro $x > 0$ máme
$$-\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}$$
- pro $x < 0$ máme
$$\frac{1}{x} \leq y \leq -\frac{1}{x}$$

Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}$$





(f) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce ln, $\sqrt{t}$ a zlomku potřebujeme

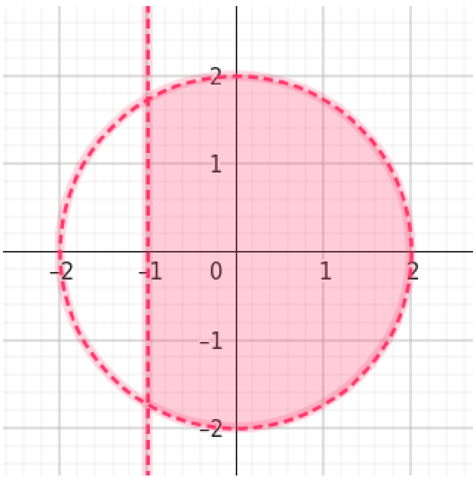
$$x + 1 > 0 \wedge 4 - (x^2 + y^2) > 0$$

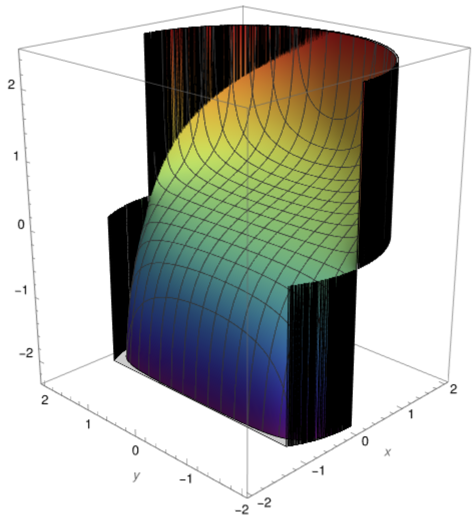
tedy

$$x > -1 \wedge 4 > x^2 + y^2$$

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > -1 \wedge 4 > x^2 + y^2\}$$





(g) $f(x, y) = \sqrt{y \sin x}$
Řešení:
Kvůli definičnímu oboru funkce $\sqrt{t}$ potřebujeme

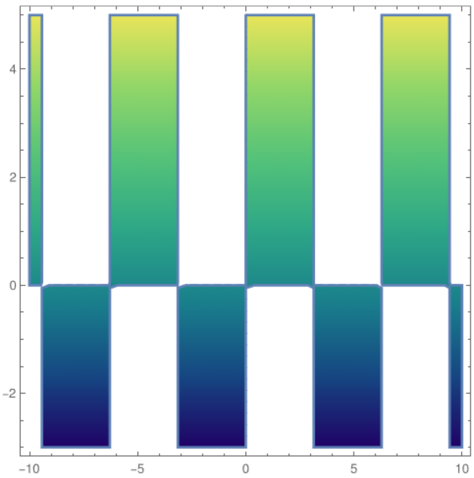
$$y \sin x \geq 0$$

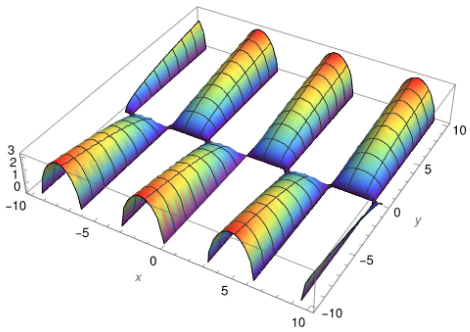
tedy

$$(y \geq 0 \wedge \sin x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \sin x \leq 0)$$

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 0 \wedge \sin x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \sin x \leq 0)\}$$



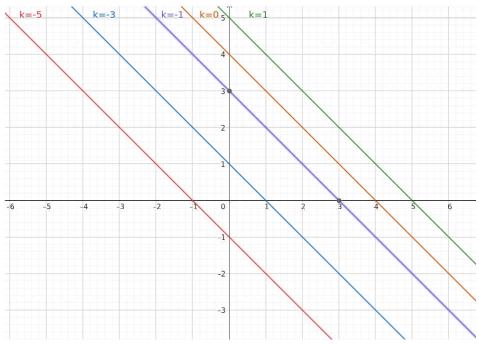


2. Určete a zakreslete vrstevnice následujících funkcí

   (a) $f(x, y) = x + y - 4$
   Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.
   Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$x + y - 4 = k,$$

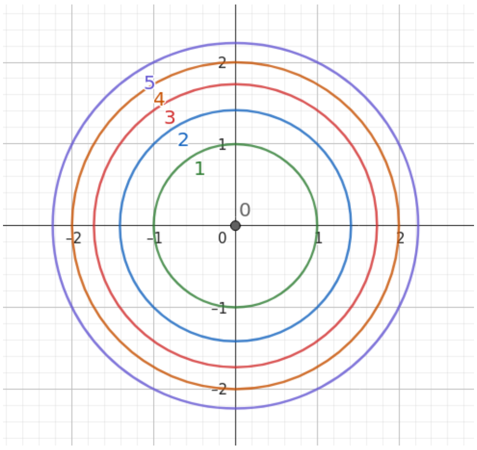
   což jsou přímky.



   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$
   Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.
   Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$x^2 + y^2 = k.$$

   Jelikož $x^2 + y^2 \geq 0$, tak vrstevnice lze najít jen pro $k \geq 0$. Konkrétně pro $k = 0$ jde o jeden bod (počátek), pro $k > 0$ jde o kružnice se středem v počátku a o poloměru $\sqrt{k}$.



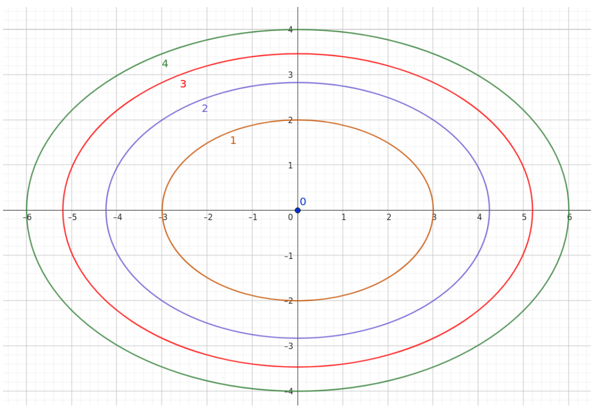
(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$

Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.

Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = k$$
$$\frac{x^2}{9k} + \frac{y^2}{4k} = 1.$$

Jelikož $x^2 + y^2 \geq 0$, tak vrstevnice lze najít jen pro $k \geq 0$. Konkrétně pro $k = 0$ jde o jeden bod (počátek), pro $k > 0$ jde o elipsy se středem v počátku a s poloosami $2\sqrt{k}$ a $2\sqrt{k}$.



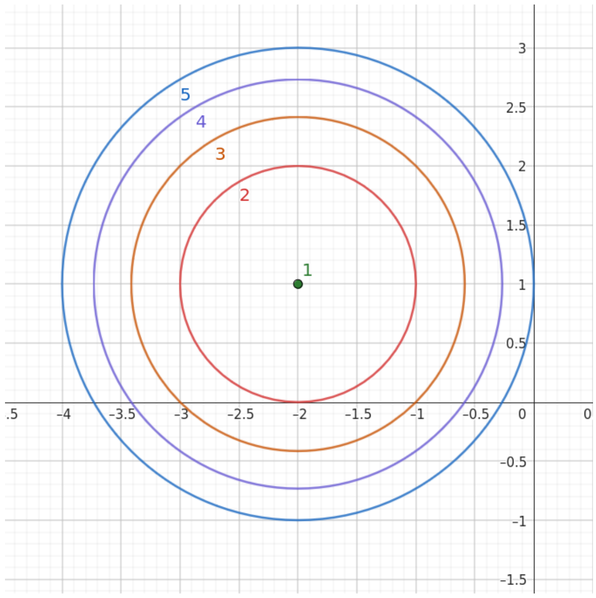
(d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 6$

Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.

Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 6 = k$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = k - 1$$

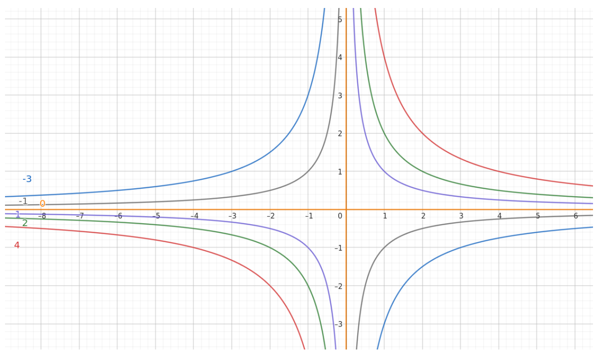
Jelikož levá strana rovnice je větší nebo rovna 0, tak vrstevnice lze najít jen pro $k \geq 1$. Konkrétně pro $k = 1$ jde o jeden bod ($[-2, 1]$), pro $k > 1$ jde o kružnice se středem v $[-2, 1]$ a s poloměrem $\sqrt{k-1}$.



(e) $f(x, y) = xy$
Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.
Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$xy = k$$

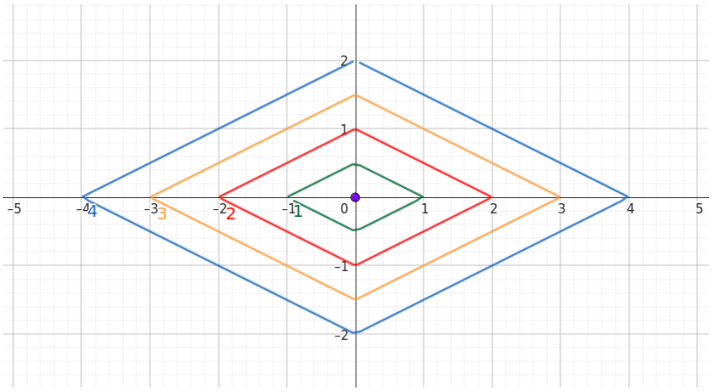
Pro $k = 0$ jsou vrstevnicemi osy souřadnic. Pro $k \neq 0$ lze přepsat $y = \frac{k}{x}$, kde $x \neq 0$, jde tedy o hyperboly..



(f) $f(x, y) = |x| + 2|y|$
Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.
Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$|x| + 2|y| = k$$

Jelikož levá strana rovnice je větší nebo rovna 0, tak vrstevnice lze najít jen pro $k \geq 0$. Pro $k = 0$ jde o jeden bod - počátek. Pro $k > 0$ vyjdou kosodélníky. (Lze rozepsat pro kladná a záporná x, y zvlášť a kreslit po kvadrantech.)



3. Určete definiční obor a načrtněte.

   (a) $f(x,y) = \arcsin(x+y) + \arctan(x+y) + xy$

   Řešení:

   Kvůli definičnímu oboru funkce arcsin potřebujeme

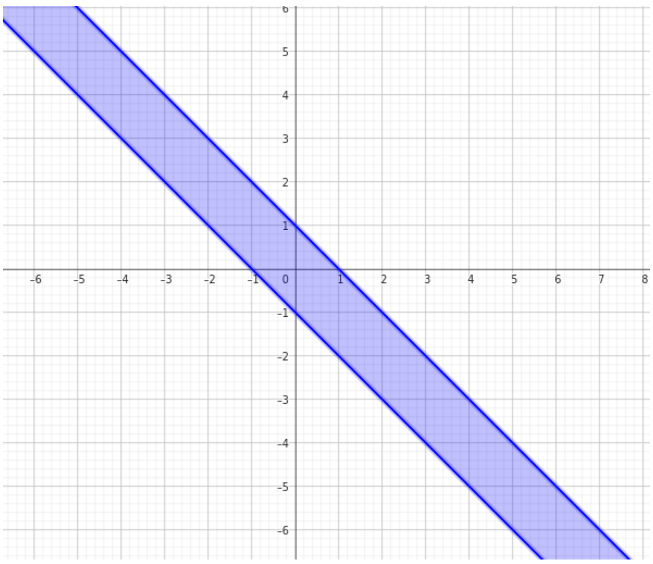
   $$-1 \leq x + y \leq 1$$

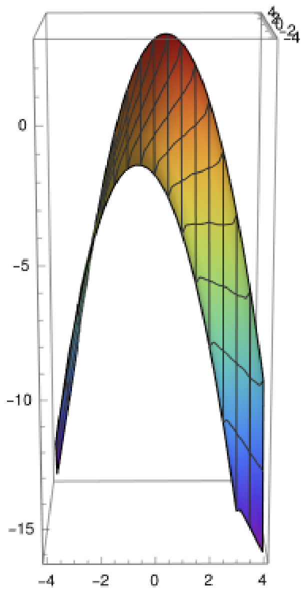
   tedy

   $$y \leq 1 - x, \qquad -1 - x \leq y.$$

   Závěr:

   $$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x,\ -1 - x \leq y.\}$$





   (b) $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x}{|x| - |y|}\right)$

Řešení: Máme podmínky

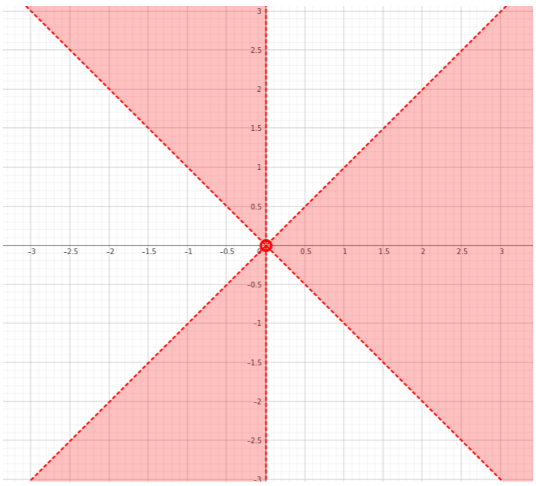
$$x \neq 0, \qquad |x| \neq |y|, \qquad \frac{x}{|x| - |y|} > 0$$

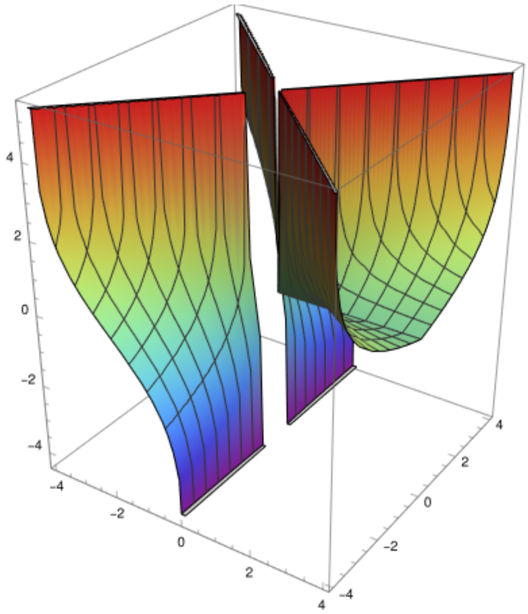
Tedy získáme nerovnice

$$(x > 0 \ \wedge \ |x| - |y| > 0) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ |x| - |y| < 0).$$

Závěr:

$$D_f = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, |x| \neq |y|, \frac{x}{|x| - |y|} > 0 \right\}$$





(c) $f(x, y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$
Řešení: Podmínky:

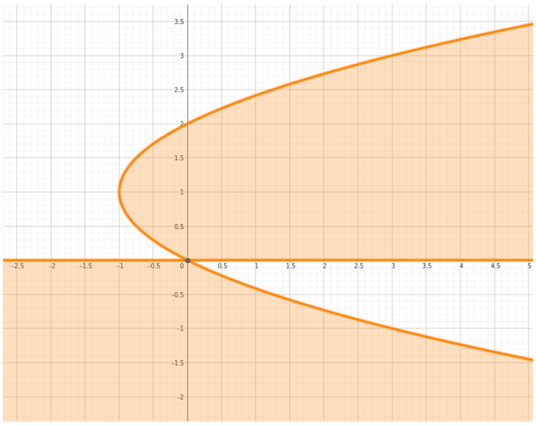
$$y(x - y^2 + 2y) \geq 0$$

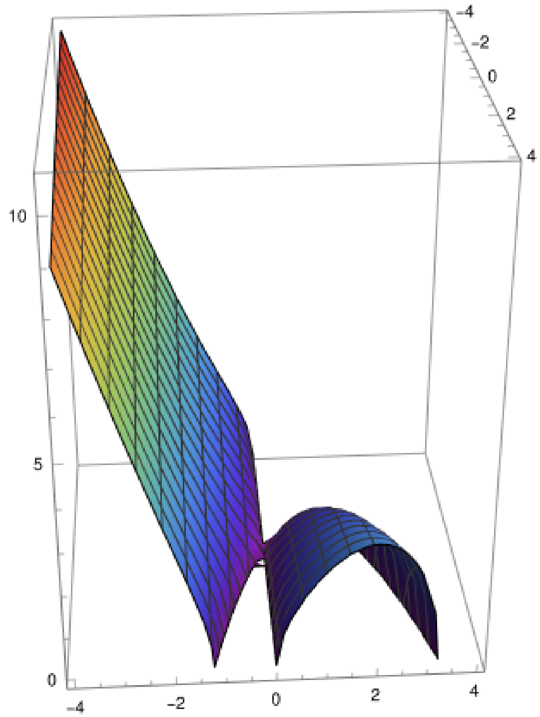
Tedy

- $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, nebo
- $x = y^2 - 2y$, nebo
- $x \geq y^2 - 2y \ \wedge \ y \geq 0$, nebo
- $x \leq y^2 - 2y \ \wedge \ y \leq 0$.

Navíc lze upravit $y^2 - 2y = (y - 1)^2 - 1$.
Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y(x - y^2 + 2y) \geq 0\}$$





(d) $f(x,y) = \arcsin\sqrt{x(x+y)}$

Řešení: Podmínky

$$0 \leq x(x+y) \leq 1$$

Tedy

- $x \geq 0 \ \wedge \ y \geq -x$, nebo
- $x \leq 0 \ \wedge \ y \leq -x$, nebo
- $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$, nebo
- $y = -x$.

Zároveň musí být splněno

$$\begin{aligned} x(x+y) &\leq 1 \\ x^2 + xy &\leq 1 \\ xy &\leq 1 - x^2 \end{aligned}$$

Tedy

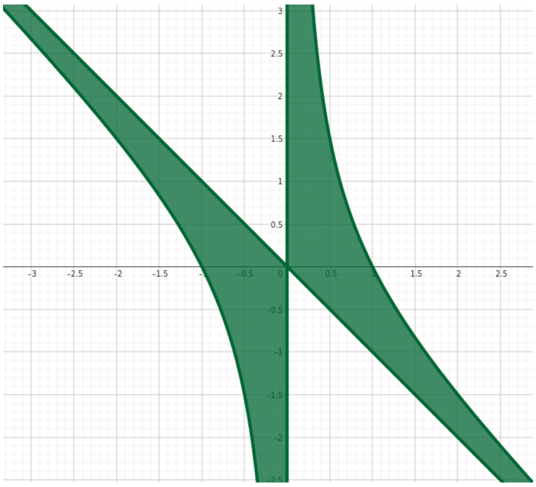
- $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$, nebo
- $x > 0 \ \wedge \ y \leq \frac{1}{x} - x$, nebo
- $x < 0 \ \wedge \ y \geq \frac{1}{x} - x$.

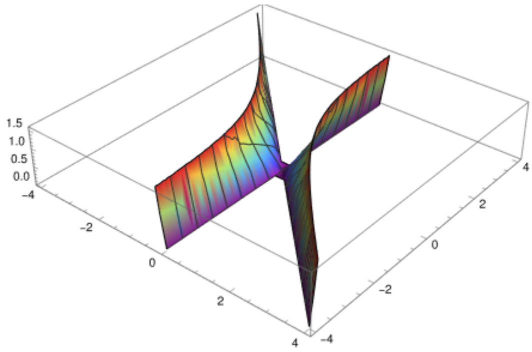
Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x(x+y) \leq 1\}$$

4. Najděte definiční obor.

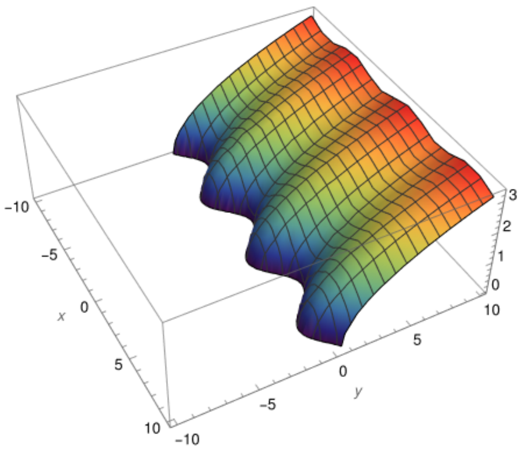
Zdroj: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/vyuka.php

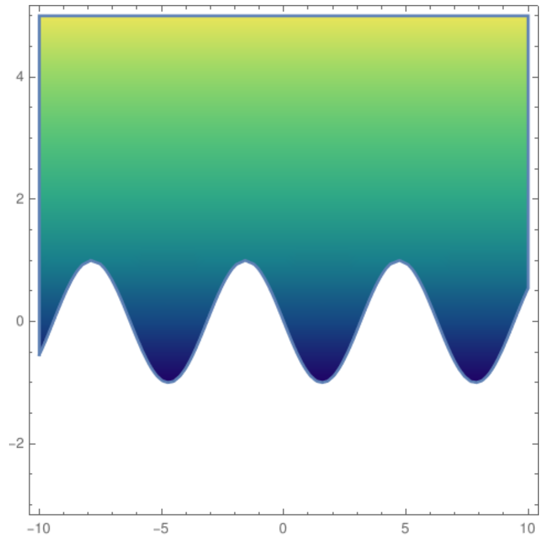




(a) $f(x,y) = \sqrt{y + \sin x}$, $a = [0,1]$
Řešení: Definiční obor:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y + \sin x \geq 0\}$$





(b) $f(x,y) = \sqrt[3]{\ln \frac{x}{y}}$, $a = [1,2]$

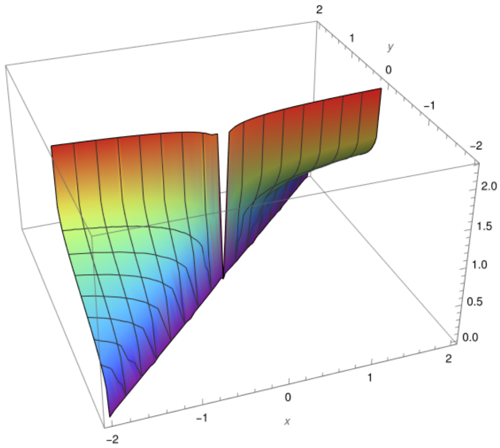
Řešení:

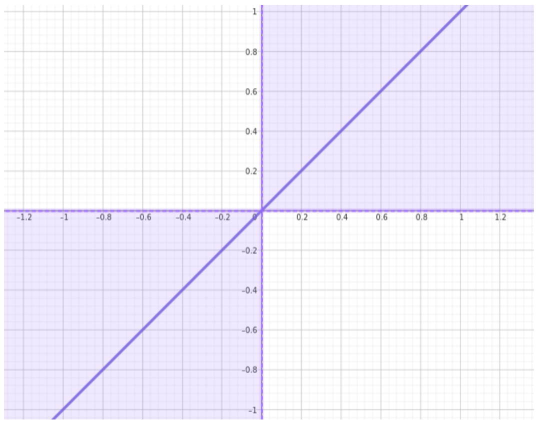
- Definiční obor:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}.$$

(c) $f(x,y) = x^{(y^x)}$, $a = [1,2]$
Řešení: Funkci přepíšeme jako

$$x^{(y^x)} = e^{y^x \log x} = e^{e^{(x \log y)} \log x}$$





Definiční obor:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$$