12. cvičení – Extrémy na nekompaktech

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí (nebo supremum a infimum):

   (a) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$, $M = [0,\infty)^2$.

   Řešení: Zdroj příkladu: https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf

   - Nejprve zkusíme najít lokální extrémy na množině $M^\circ = (0,\infty)^2$. Zderivujeme

     $$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$$
     $$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

     Nulové body: Z druhé rovnice je

     $$x = y^2,$$

     tedy po dosazení do první

     $$3y^4 - 3y = 0$$
     $$y(y^3 - 1) = 0$$

     Tedy máme dva podezřelé body: $[0,0] \notin M^\circ$ a $[1,1]$. Platí $f(1,1) = -1$.
   - Globální maximum funkce nemá: Uvažujme funkci $g(x) = f(x,0)$. Pak

     $$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty.$$

     Tedy funkce je zřejmě neomezená shora.
   - Globální minimum je v bodě $[1,1]$: Ukážeme, že na množině $K = [0,3]^2$ je globální minimum v bodě $[1,1]$. Dále ukážeme, že $f \geq 0$ na množině $M \setminus K$. Z toho pak vyplyne, že v $[1,1]$ je globální minimum na M.
     - Množina K je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Protože f je spojitá (polynom), tak na K nabývá (globálních) extrémů. Minimum může být pouze v bodě $[1,1]$ (s hodnotou $f(1,1) = -1$) nebo na hranici. Hranice je tvořena čtyřmi úsečkami. Na úsečce $(x,0)$, kde $x \in [0,3]$, a na úsečce $(0,y)$, kde $y \in [0,3]$, platí $f(x,0) = x^3 \geq 0$ a $f(0,y) = y^3 \geq 0$. Tedy tam nemůže být minimum.
       Úsečky tvaru $(x,3)$, kde $x \in [0,3]$, a $(3,y)$, kde $y \in [0,3]$, budeme diskutovat níže.
     - Uvažujme množinu $x \geq 3$, $y \leq 3$. Pak

       $$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 \geq x^3 - 3xy \geq 3x(3-y) \geq 0.$$

       Analogicky pro $y \geq 3$, $x \leq 3$:

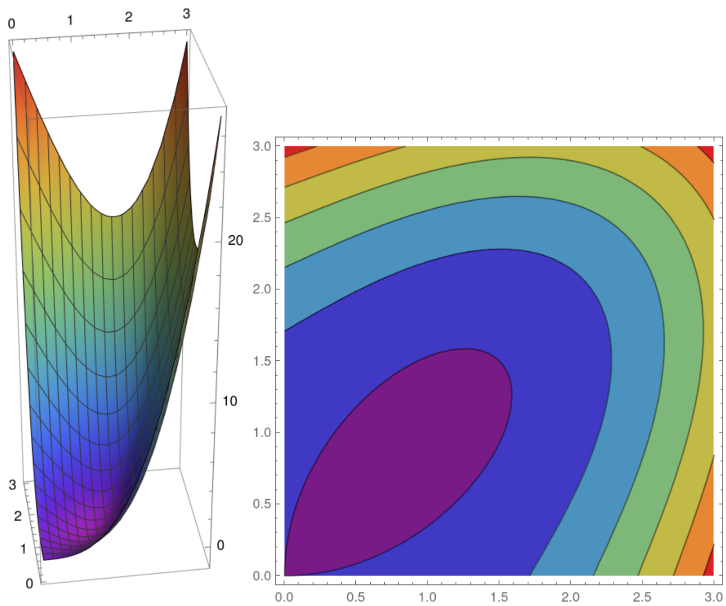
       $$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 \geq y^3 - 3xy \geq 3y(3-x) \geq 0.$$

       Nakonec pro množinu $x \geq 3$, $y \geq 3$ je

       $$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 \geq 3(x^2 - xy + y^2) = 3((x-y)^2 + xy) \geq 0.$$

  – Tedy minimum na množině K je v bodě $[1, 1]$ a má hodnotu -1. Na $M \setminus K$ platí, že $f(x, y) \geq 0$.

- Závěr: globální maximum funkce nemá, globální minimum je v bodě $[1, 1]$ a má hodnotu -1.



(b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

Řešení: Zdroj příkladu: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/

Hledáme globální extrémy na množině $M = \mathbb{R}^2$.

Funkci lze psát jako $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$, pro $g(t) = te^{-t}$. (Vrstevnicemi funkce jsou kružnice se středem v počátku.)

Stačí tedy vyšetřit extrémy funkce $g(t)$, $t \in [0, \infty)$.

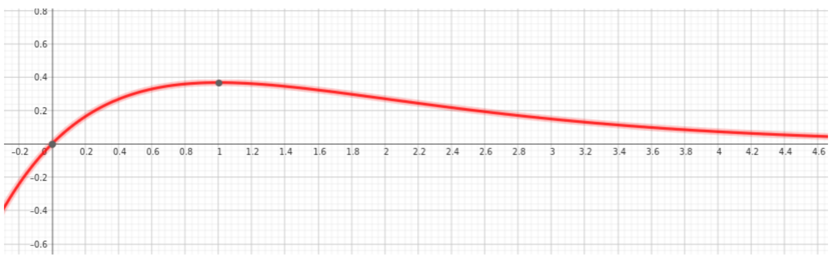
Zderivujme:

$$g'(t) = e^{-t}(1 - t).$$

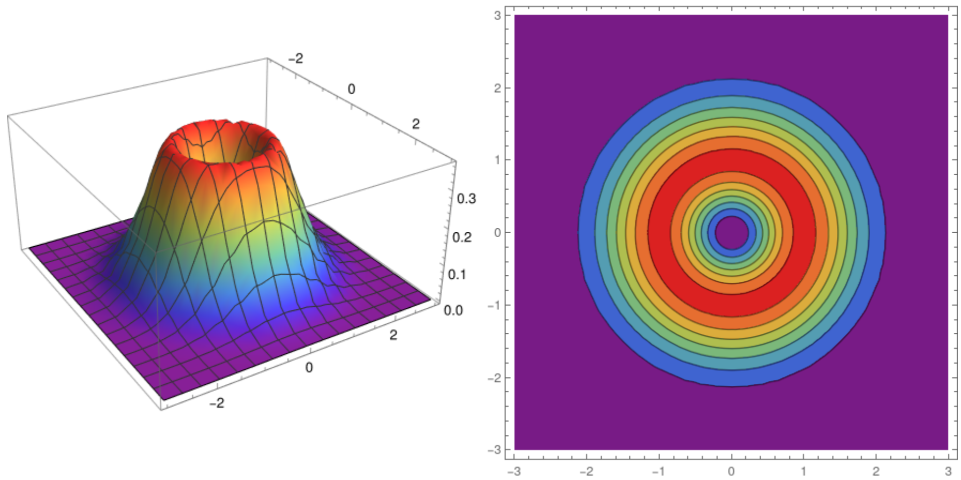
Funkce je tedy rostoucí na intervalu $[0, 1)$ a klesající na $[1, \infty)$. Navíc platí $g(0) = 0$ a

$$\lim_{t \to \infty} te^{-t} = 0.$$

Můžeme tedy funkci načrtnout a říct, že má globální maximum v $t = 1$ o hodnotě $1/e$ a minimum v $t = 0$ o hodnotě 0.



Přechodem k funkci f určíme, že f má globální maximum na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ a minimum v počátku.



(c) $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2-2y^2}$

Řešení: Zdroj: Petr Holický, Ondřej F. K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

- Funkce f je zřejmě nezáporná a zároveň $f(x, y) = 0$ právě pro $(x, y) = (0, 0)$. Zde je tedy globální minimum.
- Funkci zderivujeme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x - 10x(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2-2y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (14y - 4y(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2-2y^2}$$

  Derivace jsou nulové právě tehdy, když

$$x(1 - 5(x^2 + 7y^2)) = 0$$
$$y(14 - 4(x^2 + 7y^2)) = 0$$

  Z rovnic dostáváme řešení
  - $[0, 0]$, $f(0, 0) = 0$,
  - $[0, \pm 1/\sqrt{2}]$, $f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \frac{7}{2e}$,
  - $[\pm 1/\sqrt{5}, 0]$, $f(\pm 1/\sqrt{5}, 0) = \frac{1}{5e}$.

  Kandidátem na globální maximum jsou tedy body $[0, \pm 1/\sqrt{2}]$, s hodnotou $f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \frac{7}{2e}$.
- Ukážeme, že opravdu jde o body globálního maxima. Pro funkci f platí

$$f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2-2y^2} \leq 7(5x^2 + 2y^2)e^{-5x^2-2y^2}$$

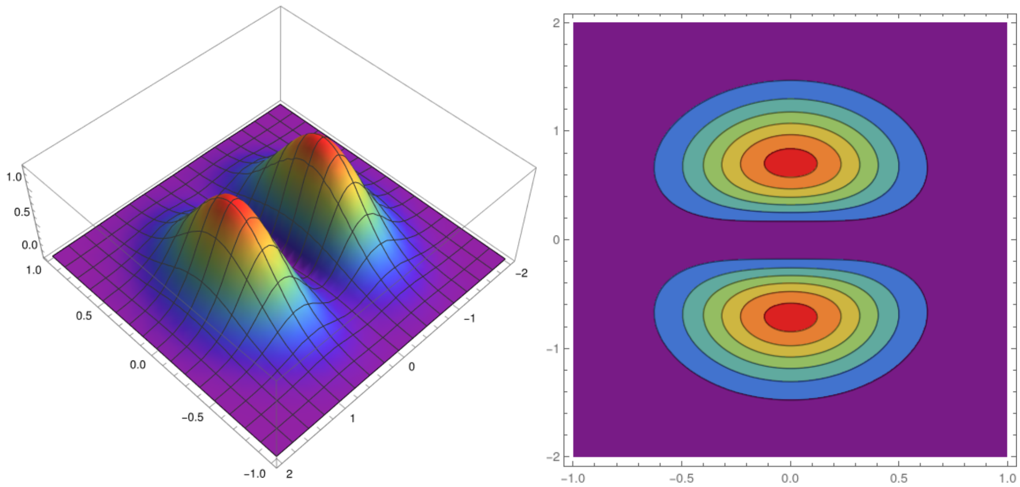
  Podobně jako v předchozím příkladě můžeme psát $h(x, y) = 7(5x^2+2y^2)e^{-5x^2-2y^2}$ jako $h(x, y) = g(5x^2 + 2y^2)$, kde $g(t) = 7te^{-t}$.

Máme $\lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0$. Tedy existuje $R > 0$ takové, že pro $t \geq R$ platí $g(t) < \frac{7}{4e}$.
Uvažujme tedy množinu $K = \{[x,y] : 5x^2 + 2y^2 \leq R\}$ a množinu $\widehat{K} = \{[x,y] : 5x^2 + 2y^2 \geq R\}$.

– Pak na $\widehat{K}$ platí
$$f(x,y) \leq h(x,y) < \frac{7}{4e}.$$

– Na množině K máme: K je kompakt (elipsa se středem v počátku) a f je na K spojitá. Nabývá tam tedy extrémů.
Globální maximum může být pouze v bodech $[0, \pm 1/\sqrt{2}]$, s hodnotou $f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \frac{7}{2e}$, nebo na hranici K. Ale pro body na hranici K platí, že $f < \frac{7}{4e}$.

Závěr: Funkce f nabývá globálního maxima v bodech $[0, \pm 1/\sqrt{2}]$, s hodnotou $f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \frac{7}{2e}$.
Globálního minima nabývá v bodě $[0,0]$ s hodnotou 0.



(d) $f(x,y) = 3x + \dfrac{4y}{x^2} + \dfrac{27}{y^3}$, $M = (0,\infty)^2$

Řešení: Zdroj příkladu: https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf

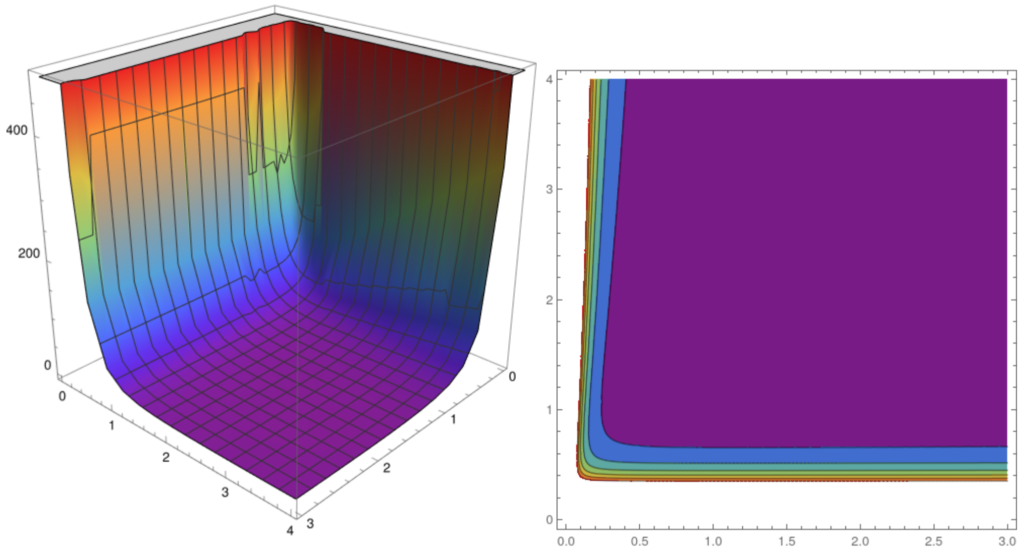
- Funkce je na M nezáporná. Zároveň je shora neomezená, protože
$$\lim_{x\to\infty} f(x,1) = \lim_{x\to\infty} 3x + \frac{4}{x^2} + 27 = \infty.$$

- Zderivujme
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - \frac{8y}{x^3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{x^2} - \frac{81}{y^4}$$
Jediným stacionárním bodem je bod $[2,3]$, kde $f(2,3) = 10$.

- Ukážeme, že v tomto bodě je globální minimum.
Uvažujme množinu $K = [\frac{3}{5}, 4] \times [1, 40]$. Pak máme

– Pro $x \geq 4$ je
$$f(x,y) > 3x \geq 12 > 10.$$
– Pro $x \in (0,4]$, $y \geq 40$ je
$$f(x,y) > \frac{4y}{x^2} \geq \frac{y}{4} \geq 10$$
– Pro $y \in (0,1]$ je
$$f(x,y) > \frac{27}{y^3} \geq 10$$
– Pro $y \geq 1$, $x \in (0, \frac{3}{5}]$ je
$$f(x,y) > \frac{4y}{x^2} \geq \frac{4}{x^2} \geq 10$$

Závěr: Globální minimum je v bodě $[2,3]$ s hodnotou $f(2,3) = 10$.



(e) $f(x,y) = (7x+10y)e^{-x-y}$, $x > 0$, $y > 0$.
Řešení:
Zdroj: Petr Holický, Ondřej F. K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr
Položme $M = (0,\infty) \times (0,\infty)$.

- Zderivujeme:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = (-7x - 10y + 7)e^{-x-y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (-7x - 10y + 10)e^{-x-y}$$
Stacionární bod funkce nemá.
- Protože f je spojitá na $\overline{M}$, tak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.
Budeme tedy dále pracovat na $\overline{M} = [0,\infty) \times [0,\infty)$.
Zřejmě $f \geq 0$ na $\overline{M}$. Navíc $f(x,y) = 0$ právě pro $(x,y) = (0,0)$. Tedy v počátku má f globální minimum.
Pro M pak platí $\inf f(M) = 0$.

- Vyšetříme chování f na hranici M.
  - Máme $f(0,0)=0$.
  - Na $(x,0)$, kde $x>0$ je

    $$f(x,0)=h_1(x)=7xe^{-x}$$

    Je

    $$h_1'(x)=7(1-x)e^{-x}.$$

    Podezřelým bodem je tedy $[1,0]$ s hodnotou $f(1,0)=7/e$.
  - Na $(0,y)$, kde $y>0$ je

    $$f(0,y)=h_2(y)=10ye^{-y}$$

    Je

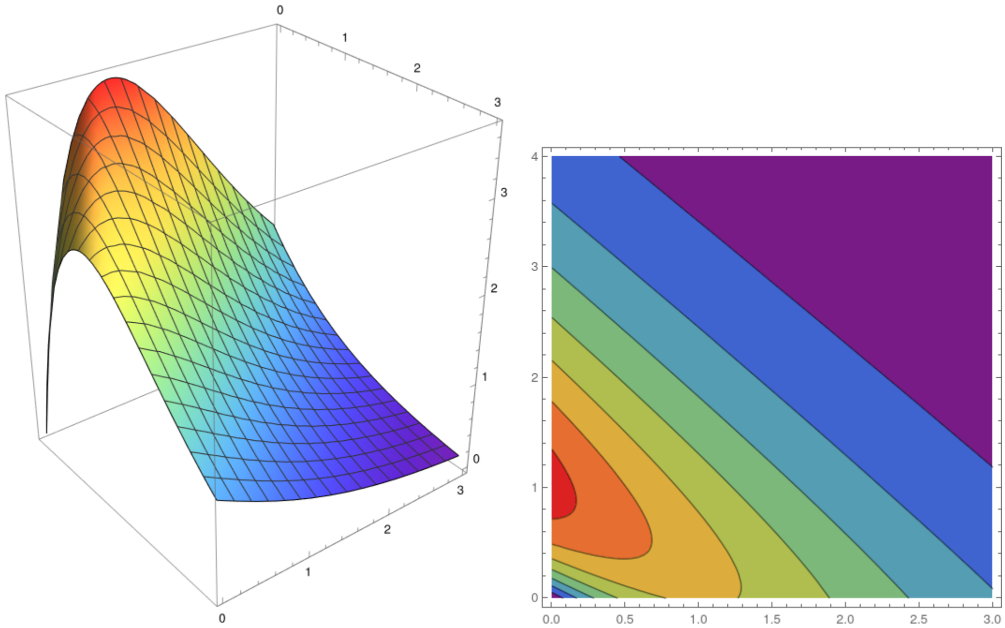
    $$h_2'(y)=10(1-y)e^{-y}.$$

    Podezřelým bodem je tedy $[0,1]$ s hodnotou $f(0,1)=10/e$.
- Ukážeme že f nabývá maxima na $\overline{M}$ bodě $[0,1]$ s hodnotou $10/e$.
  - Platí odhad

    $$f(x,y)\leq 10(x+y)e^{-x-y}$$

    Můžeme psát jako $10(x+y)e^{-x-y}=g(x+y)$, kde $g(t)=10te^{-t}$. Protože $\lim_{t\to\infty}=0$, tak existuje takové $R>0$, že pro $t\geq R$ je $10te^{-t}<\frac{5}{e}$. Neboli $f(x,y)<\frac{5}{e}$ na množině $\{[x,y]:x\geq 0, y\geq 0, x+y\geq R\}$.
  - Uvažujme nyní množinu $A=\{[x,y]:x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq R\}$. Jde o trojúhelník, množina je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce f na ní tedy nabývá extrémů. Zřejmě $[0,0]\in A$ i $[0,1]\in A$. Z výpočtů výše plyne, že extrémy jsou v bodech $[0,0]$ a $[0,1]$.

Závěr: $\inf f(M)=0$, $\sup f(M)=\frac{10}{e}$. Funkce na M nenabývá extrémů.



2. Najděte globální extrémy funkcí (nebo supremum a infimum):

   Zdroj příkladů: Petr Holický, Ondřej F. K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

   https://www.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/

   (a) $f(x,y) = \sin x + \sin y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \pi^2/4\}$

   Řešení:

   Zdroj příkladů: Petr Holický, Ondřej F. K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

   - Uvažujme množinu $K = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \pi^2/4\}$. Množina K je kompaktní, funkce f je spojitá na K, tedy tam nabývá extrémů.
   - Zderivujme f na vnitřku K:
   $$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x$$
   $$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos y$$
   Stacionárními body jsou tedy body tvaru $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi)$, $k, m \in \mathbb{Z}$. Tyto body ale neleží v K, tedy na vnitřku K se extrémů nenabývá.
   - Na hranici K budeme hledat podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Hranici K lze vyjádřit pomocí rovnice $x^2 + y^2 = \pi^2/4$. Pracujeme tedy s funkcí $g(x,y) = x^2 + y^2 - \pi^2/4$. Platí $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
   Extrémy mohou být v bodech, kde $\nabla g = 0$, tedy $(2x, 2y) = (0,0)$, tedy v počátku, který ale neleží na ∂K.
   Tedy budeme hledat body, kde $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Řešíme tedy

soustavu

$$\begin{aligned}\cos x + \lambda 2x &= 0\\ \cos y + \lambda 2y &= 0\\ x^2 + y^2 &= \pi^2/4.\end{aligned}$$

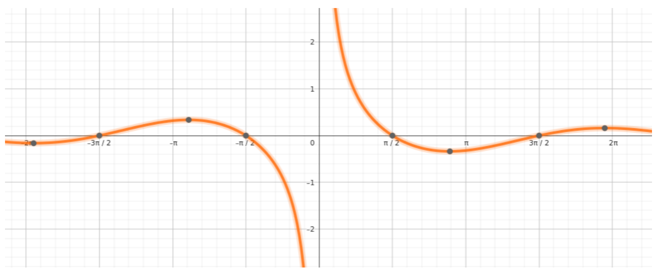
Z poslední rovnice plyne, že $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Z prvních dvou rovnic je zjevné, že $x, y \neq 0$. Dále z nich lze vyjádřit

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{\cos y}{y}.$$

Rovnice je zřejmě splněna pro body $x = y$. Dále ukážeme, že funkce $h(t) = \frac{\cos t}{t}$ je prostá na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, tedy $\frac{\cos x}{x} \neq \frac{\cos y}{y}$, jestliže $x \neq y$.
Funkce h je lichá. Zderivujme

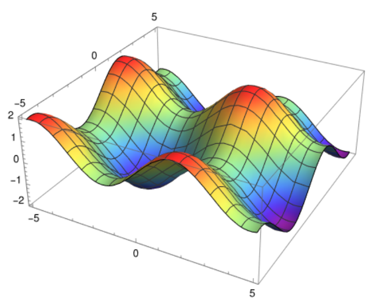
$$h'(t) = \frac{-t \sin t - \cos t}{t^2}$$

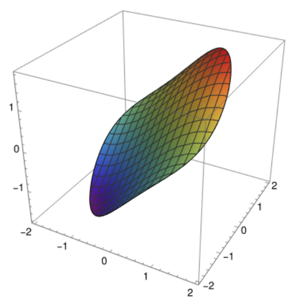
Na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je $h' < 0$, tedy h je klesající. Navíc $\lim_{h \to 0+} h = \infty$. Můžeme načrtnout graf:

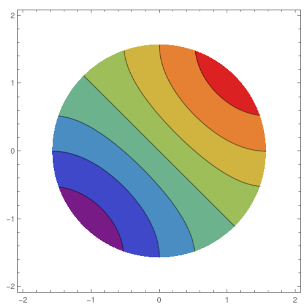


Funkce h je tedy prostá na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Odtud plyne, že $x = y$.
Dosazením do původní rovnice získáme podezřelé body $[\frac{\pi}{\sqrt{8}}, \frac{\pi}{\sqrt{8}}]$ a $[-\frac{\pi}{\sqrt{8}}, -\frac{\pi}{\sqrt{8}}]$.

- Porovnáním funkčních hodnot zjistíme, že na K nabývá f maxima v bodě $[\frac{\pi}{\sqrt{8}}, \frac{\pi}{\sqrt{8}}]$ a minima v bodě $[-\frac{\pi}{\sqrt{8}}, -\frac{\pi}{\sqrt{8}}]$.
  Tedy platí, že $\sup f(M)$ se nabývá v bodě $[\frac{\pi}{\sqrt{8}}, \frac{\pi}{\sqrt{8}}]$ a $\inf f(M)$ v bodě $[-\frac{\pi}{\sqrt{8}}, -\frac{\pi}{\sqrt{8}}]$.
  Extrémů funkce f na M nenabývá.







(b) $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$

Řešení:

- Uvažujme množinu $K = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x+y+z = \frac{\pi}{2}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. K má tvar naklopeného trojúhelníku. Množina K má navíc v $\mathbb{R}^3$ prázdný vnitřek. Množina K je kompaktní, funkce f je spojitá na K, tedy tam nabývá extrémů.
- Na K budeme hledat podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množinu K lze vyjádřit pomocí rovnice $x+y+z-\frac{\pi}{2}$. Pracujeme tedy s funkcí $g(x,y,z) = x+y+z-\frac{\pi}{2}$. Platí $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
  Extrémy mohou být v bodech, kde $\nabla g = 0$, tedy $(1,1,1) = (0,0,0)$, což není možné.
  Tedy budeme hledat body, kde $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Řešíme tedy soustavu
  $$\begin{aligned} \cos x \sin y \sin z + \lambda x &= 0 \\ \sin x \cos y \sin z + \lambda y &= 0 \\ \sin x \sin y \cos z + \lambda z &= 0 \\ x+y+z &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
  Z podmínek navíc plyne, že $x, y, z \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Odečtením prvních dvou rovnic a první a třetí rovnice získáme
  $$\begin{aligned} \sin z(\cos x \sin y - \sin x \cos y) = \sin z \sin(y-x) \quad &= 0 \\ \sin y(\cos x \sin z - \sin x \cos z) = \sin y \sin(z-x) \quad &= 0 \\ x+y+z \quad &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
  Řešení získáme rozborem možností
  i. $\sin z = 0$ a $\sin y = 0$, tedy dostaneme bod $[\frac{\pi}{2}, 0, 0]$.
  ii. $\sin z = 0$ a $\sin(z-x) = 0$, tedy dostaneme bod $[0, \frac{\pi}{2}, 0]$.
  iii. $\sin(y-x) = 0$ a $\sin y = 0$, tedy dostaneme bod $[0, 0, \frac{\pi}{2}]$.
  iv. $\sin(y-x) = 0$ a $\sin(z-x) = 0$, odtud $y = x = z$, tedy dostaneme bod $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.
- Porovnáním funkčních hodnot zjistíme, že na K nabývá f maxima v bodě $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ a minima v bodech $[\frac{\pi}{2}, 0, 0]$, $[0, \frac{\pi}{2}, 0]$ a $[0, 0, \frac{\pi}{2}]$.
  Tedy platí, že $\sup f(M) = \max f(M)$ se nabývá v bodě $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. Minima funkce f na M nenabývá.

(c) $f(x,y) = x - y + 2z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2, x^2+z^2 < y\}$

(d) $f(x,y) = x+y+z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1, x^2+y^2+z^2-2x < 0\}$

(e) $f(x,y) = -x^4 - y^4$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 > 1\}$

K vyřešení soustavy rovnic podmínky „nebo“ využijeme toho, že z první rovnice musí buď $\lambda = 0$ nebo $4(x^2 + y^2)x - Ky = 0$. Lambda být nula nemůže kvůli druhé rovnici, takže musí platit $(x^2+y^2)x - Ky = 0$. Díky pozorování ($\triangle$) a tomu, že bod $[0,0]$ už je mezi podezřelými se můžeme omezit na $x \neq 0$ a $y \neq 0$. Díky tomu můžeme bez problémů z $4(x^2 + y^2)x - Ky = 0$ vyjádřit $(x^2 + y^2)$ a dosadit do třetí rovnice. Po úpravách dojdeme k $y = \frac{16x^3}{K}$, což opět dosadíme do třetí rovnice a dořešením dostávám podezřelé body:

$$[x, y] = [\tfrac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, \tfrac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}], [-\tfrac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, -\tfrac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}]$$

Dosazením všech podezřelých bodů do funkce máme:

$$f([0,0]) = 0, \qquad f([\tfrac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, \tfrac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}]) = \tfrac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}, \qquad f([-\tfrac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, -\tfrac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}]) = -\tfrac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}$$

Z předchozích úvah je jasné, že maximum f na M je $\frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}$ a to v bodě $[\frac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, \frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}]$ a minimum $-\frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}$ a to v bodě $[\frac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, \frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}]$.

2. • $f(x, y, z) = x - y + 2z, \qquad \nabla f(x, y, z) = (1, -1, 2)$

2C • $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x^2 + z^2 < y\}$

Množina M je očividně omezená, ale není uzavřená. Její uzávěr $\overline{M} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x^2 + z^2 \leq y\}$ už je ale uzavřený i omezený a f je spojitá na $\overline{M}$, takže se na něm bude nabývat maxima a minima. Úlohu si rozdělíme na dva kusy

- $M_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x^2 + z^2 < y\}$
  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2, \qquad \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$
  $G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < y\}$ pro M_1 a $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$
  Podle věty o multiplikátoru pro bod extrému musí platit buďto

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad [x, y, z] = [0, 0, 0] \notin M_1,$$

  nebo že existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující následující sadu rovnic.

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0 \\ -1 + 2\lambda y &= 0 \\ 2 + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2 \end{aligned}$$

  Vyřešením třeba pomocí vyjádření x, y a z z prvních tři rovnic a dosazením do poslední dostáváme řešení:

$$[x, y, z] = [-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{2}{\sqrt{3}}] \notin M_1 \quad \text{a} \quad [x, y, z] = [\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{2}{\sqrt{3}}] \notin M_1$$

  Na M_1 tedy žádné podezřelé body nejsou.

- $M_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x^2 + z^2 = y\}$
  $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2, \qquad \nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$
  $g_2(x, y, z) = x^2 + z^2 - y, \qquad \nabla g_2(x, y, z) = (2x, -1, 2z)$
  $G = \mathbb{R}^3$ pro M_2 a $f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$
  Podle věty o multiplikátoru pro bod extrému musí platit buďto

$$\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \text{ je násobkem } \nabla g_2(x, y, z) = (2x, 1, 2z),$$

  nebo že existují $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ splňující následující sadu rovnic.

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x &= 0 \\ -1 + 2\lambda_1 y - \lambda_2 &= 0 \\ 2 + 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2 \\ x^2 + z^2 &= y \end{aligned}$$

Z podmínky lineární závislosti dostáváme body

$$[x,y,z] = [0, -\tfrac{1}{2a}, 0],\ a \in \mathbb{R},\ \text{a}\ [x,y,z] = [b, -\tfrac{1}{2}, c],\ b,c \in \mathbb{R}.$$

Žádný z těchto bodu ale nesplňuje $g_1([x,y,z]) = 0 = g_2(x,y,z)$, takže nepřipadají v úvahu jako podezřelé.

Nyní k řešení soustavy. Dosazením poslední rovnice v soustavě do předposlední rovnice dostáváme $y^2 + y = 2 \Rightarrow y = 1, -2$. Z rovnic je jasné, že $x \neq 0$ a $z \neq 0$, a proto můžeme z první a třetí rovnice vyjádřit $(2\lambda_1 + 2\lambda_2)$ a dát je do rovnosti. Z toho dostaneme $z = 2x$. Nyní už snadno dosazením obou poznatků do čtvrté rovnice dostáváme řešení:

$$[x,y,z] = [\tfrac{1}{\sqrt{5}}, 1, \tfrac{2}{\sqrt{5}}] \quad \text{a} \quad [-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, 1, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}]$$

Dosazením do funkce máme:

$$f([\tfrac{1}{\sqrt{5}}, 1, \tfrac{2}{\sqrt{5}}]) = \sqrt{5} - 1 \quad \text{a} \quad f([-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, 1, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}]) = -\sqrt{5} - 1$$

Je tedy jasné, že minimum f na M_2 je $-\sqrt{5} - 1$ a to v bodě $[-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, -\frac{2}{\sqrt{5}}]$ a maximum $\sqrt{5} - 1$ a to v bodě $[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}}]$.

Celkem tedy na uzávěru $\overline{M}$ je maximum $\sqrt{5} - 1$ a minimum $-\sqrt{5} - 1$ a obě se nabývají na $\overline{M} \setminus M$, a tedy jsou pro množinu M supremem a infimem, kterých se nenabývá. To plyne z vlastnosti uzávěru a spojitosti funkce na uzávěru, neboť z vlastnosti uzávěru platí, že pro $[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}}]$ existuje posloupnost $[x_n, y_n, z_n] \in M$, která k němu konverguje a ze spojitosti funkce na uzávěru $f([\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}}]) \to \sqrt{5} - 1$. Pro infimum by se to udělalo obdobně. Závěr tedy je, že funkce f má na M infimum $-\sqrt{5} - 1$ a supremum $\sqrt{5} - 1$ a ani jednoho se nenabývá.

2a

Řešení:

1. $f(x,y,z) := x + y + z$, $H = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x < 0\}$. Je vhodné si uvědomit, že H je průnik dvou koulí. Druhou podmínku z její definice si totiž můžeme přepsat jako $(x-1)^2 + y^2 + z^2 < 1$.

   Množina H není kompaktní, tedy se na ní extrémů nabývat nemusí. Nicméně je omezená, a tedy má smysl vyšetřovat extrémy funkce f na kompaktní množině

$$\overline{H} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x \le 0\}$$

   Funkce f je na ní spojitá, extrémů se tam tedy nabývá, a tedy stačí hledat podezřelé body. Označme $g_1(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ a $g_2(x,y,z) := x^2 - 2x + y^2 + z^2$, a spočítejme si gradienty:

$$\nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

   Množinu $\overline{H}$ si rozdělíme na čtyři části. Mlčky vlastně využíváme Tvrzení 6 ve verzi pro maxima.

   - $\operatorname{int} \overline{H} = H$ (toto obecně platit nemusí, ale v tomto konkrétním případě to platí). Hledáme lokální extrémy, tedy potřebujeme gradient

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

     Tedy ∇f se nule nikdy nerovná, a tedy na H funkce f žádný lokální (a tedy ani globální) extrém nemá.
   - $[x,y,z] \in \overline{H}\colon\ g_1(x,y,z) = 0$. Tady máme jednu vazbu, použijeme Větu 1.
     - Hledáme nejprve body, kde $\nabla g_1 = 0$, což je jen bod $[0,0,0]$, ale ten nenáleží do množiny $\{g_1 = 0\}$ (množiny bodů, ve kterých je funkce g_1 nulová).
     - Tedy existuje λ taková, že

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda 2x, \\ 1 &= \lambda 2y, \\ 1 &= \lambda 2z. \end{aligned}$$

       Zjevně $\lambda \neq 0$, tedy $x = y = z$, a tedy z rovnice $g_1(x,x,x) = 0$ máme první dvojici podezřelých bodů $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Nicméně jen jeden z nich náleží do množiny $\overline{H}$, a sice

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

   - $[x,y,z] \in \overline{H}\colon\ g_2(x,y,z) = 0$. Opět jedna vazba, opět Lagrange.
     - Hledáme nejprve body, kde $\nabla g_2 = 0$, což je jen bod $[1,0,0]$, ale ten nenáleží do množiny $\{g_2 = 0\}$.

– Tedy existuje λ taková, že

$$\begin{aligned}1 &= \lambda(2x-2),\\ 1 &= \lambda 2y,\\ 1 &= \lambda 2z.\end{aligned}$$

opět vidíme, že $\lambda \neq 0$, tedy $y = z = \frac{1}{2\lambda}$. A první rovnici můžeme podělit 2λ, dostaneme $\frac{1}{2\lambda} = x - 1$, tedy $y = x - 1$. Dosadíme $x = y + 1$ do rovnice $g_2 = 0$, dostaneme

$$(y+1-1)^2 + y^2 + y^2 = 1,$$

tedy máme další dvojici podezřelých bodů $\left[\frac{\pm 1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, z nichž jen jeden je v množině $\overline{H}$:

$$\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

- A konečně množina $[x,y,z] \in \overline{H}: \; g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$. Tady máme vazby dvě:
  – ∇g_1 a ∇g_2 jsou lineárně závislé, neboli:
    * $\nabla g_1 = 0$, pak $x = y = z = 0$, ale $g_1(0,0,0) = -1 \neq 0$, nebo
    * Existuje λ tak, že $\nabla g_2 = \lambda \nabla g_1$, tedy

$$\begin{aligned}2\lambda x &= 2x - 2,\\ 2\lambda y &= 2y,\\ 2\lambda z &= 2z.\end{aligned}$$

Po úpravě máme

$$\begin{aligned}(2\lambda-2)x &= -2,\\ (2\lambda-2)y &= 0,\\ (2\lambda-2)z &= 0.\end{aligned}$$

Z první rovnice vidíme, že $(2\lambda - 2) \neq 0$, tedy tím ve druhé a třetí rovnici můžeme podělit a dostaneme $y = z = 0$. Pak ze vztahů $g_1 = g_2 = 0$ hravě zjistíme, že zde nemáme žádná řešení.

  – Nebo existují λ_1 a λ_2 tak, že

$$\begin{aligned}1 &= 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x - 2\lambda_2 = 2(\lambda_1+\lambda_2)x - 2\lambda_2,\\ 1 &= 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 2(\lambda_1+\lambda_2)y,\\ 1 &= 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 z = 2(\lambda_1+\lambda_2)z,\\ 0 &= x^2+y^2+z^2-1,\\ 0 &= x^2+y^2+z^2-2x.\end{aligned}$$

Z druhé rovnice je vidět, že $2(\lambda_1+\lambda_2) \neq 0$, tedy tím můžeme rovnice podělit, a tedy $y = z$. Odečtením 5. rovnice od 4. dostaneme, že $x = \frac{1}{2}$. A ze čtvrté rovnice tedy

$$\frac{1}{4} + 2y^2 = 1,$$

a tedy $y = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$. Máme tedy dvojici podezřelých bodů

$$\left[\frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{8}}, \pm\sqrt{\frac{3}{8}}\right].$$

A nyní zbývá už jen dosazení:

$$\begin{aligned}
f\left(\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right) &= \sqrt{3} = S \doteq 1.7321,\\
f\left(\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right) &= 1 - \sqrt{3} = I \doteq -0.73205,\\
f\left(\left[\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}}\right]\right) &\doteq 1.7247,\\
f\left(\left[\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{8}}, -\sqrt{\frac{3}{8}}\right]\right) &\doteq -0.72474.
\end{aligned}$$

Tedy, jelikož všechny tyto body nejsou v množině H a díky Tvrzení 3 víme, že funkce f na H minima ani maxima nenabývá.

2e

2. $f(x,y) := -x^4 - y^4$, $H = \{x^2 + 2y^2 > 1\}$. Je vidět, že infimum je $I = -\infty$, stačí uvážit $x = y \to \infty$, pak $f(x,x) \to -\infty$.

   Množina není ani omezená, ani uzavřená, extrémů se tedy nabývat nemusí. Tedy, abychom mohli vyšetřit jaké bude supremum (nebo snad maximum), tak je třeba si množinu omezit a uzavřít. Je vidět, že čím blíže jsme k nule, tím vyšší bude hodnota funkce. Tedy je rozumné zvolit třeba množinu

   $$K := \{x^4 + y^4 \leq 42,\ x^2 + 2y^2 \geq 1\},$$

   což je jakési „mezikruží". K už kompaktní je, a tedy funkce f (která je spojitá) na K maxima nabývá. (Minima taky, ale již víme, že to je nám jedno.) Navíc

   $$\sup_{[x,y]\in H} f(x,y) = \sup_{[x,y]\in K} f(x,y) = \max_{[x,y]\in K} f(x,y).$$

   Toto je skoro zřejmé, nicméně celé zdůvodnění si žádá několik kroků. V písemce toto není třeba probírat tak podrobně, ale je fajn si uvědomit, jak by se to formálně zdůvodnilo.

   - $\overline{\operatorname{int} K} = \overline{\{x^4 + y^4 < 42,\ x^2 + 2y^2 > 1\}} = K$, tedy z Tvrzení 3 plyne, že

     $$\sup_{[x,y]\in \operatorname{int} K} f(x,y) = \sup_{[x,y]\in K} f(x,y). \tag{1}$$

   - $$[x,y] \in H \setminus \operatorname{int} K = \{x^4 + y^4 \geq 42\} \Rightarrow f(x,y) \leq -42.$$

     Tedy

     $$\sup_{[x,y]\in H\setminus \operatorname{int} K} f(x,y) \leq -42.$$

- $[1,1] \in \operatorname{int} K$, tedy

$$\sup_{[x,y]\in \operatorname{int} K} f(x,y) \geq f(1,1) = -2 > -42 = \sup_{[x,y]\in H\setminus \operatorname{int} K} f(x,y). \tag{2}$$

- $H = (H \setminus \operatorname{int} K) \cup (\operatorname{int} K)$. Tedy díky Tvrzení 6 a (2) máme

$$\sup_{[x,y]\in H} f(x,y) = \max\left\{\sup_{[x,y]\in H\setminus \operatorname{int} K} f(x,y), \sup_{[x,y]\in \operatorname{int} K} f(x,y)\right\} = \sup_{[x,y]\in \operatorname{int} K} f(x,y). \tag{3}$$

- V posledním kroku jen dáme dohromady (1) a (3) a dostaneme výsledek. Jelikož je K kompaktní a f spojitá, je supremum a maximum to samé.

Pro zjištění suprema na množině H tedy hledáme maximum na množině K, a body kde se ho nabývá. Budou-li tyto body v množině H, pak jsme na ní našli maximum. Pokud ne, pak se maxima na množině H nenabývá a máme jen supremum.

Na vnitřku množiny K funkce extrém nemá, neboť $\nabla f(x,y) = (-4x^3, -4y^3)^\top$, tedy $\nabla f = 0$ pouze když $x = y = 0$, což do množiny K nenáleží.

Hranice má dvě části:

- $\{x^4 + y^4 = 42\}$. Tam být maximum nemůže, neboť $f(1,1) = -2$, a pro $[x,y] \in \{x^4 + y^4 = 42\}$ platí, že $f([x,y]) = -42$.
- $x^2 + 2y^2 = 1$. Tedy konečně přichází na řadu Lagreangeovy multiplikátory. Označme $g(x,y) := x^2 + 2y^2 - 1$. Pak $\nabla g(x,y) = (2x, 4y)^\top$. Tento gradient je nulový pouze pro $x = y = 0$, což v množině K není. Tedy z Věty 1 plyne, že existuje λ tak, aby

$$\begin{pmatrix} -4x^3 \\ -4y^3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}.$$

Tedy buď je $x = 0$ ($g(x,y) = 0$, tedy $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$), nebo $y = 0$ (pak $x = \pm 1$). A nebo mohu vydělit první rovnici x, druhou y a dostaneme, že $4\lambda = 2(-4x^2) = -4y^2$. Tedy $2x^2 = y^2$, a z rovnice $g(x,y) = 0$ dostáváme 4 řešení: $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]$ a $\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]$. Dosazení:

$$f\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}, \tag{4}$$

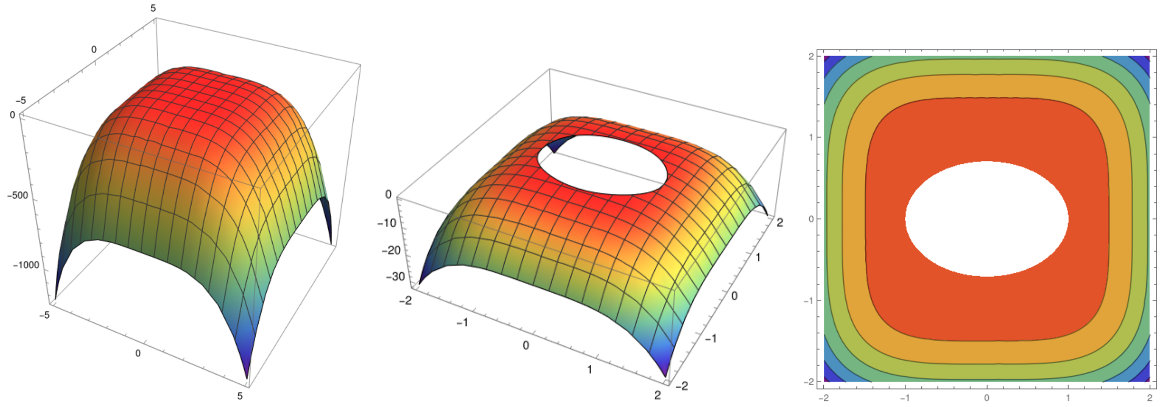
$$f(\pm 1, 0) = -1, \tag{5}$$

$$f\left(\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]\right) = -\frac{1}{5}, \tag{6}$$

$$f\left(\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]\right) = -\frac{1}{5}. \tag{7}$$

Jelikož body $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]$ a $\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]$ v množině Hneleží, dostáváme, že maximum neexistuje a $S = -\frac{1}{5}$.

Příklad (2e)



3. Ukažte, že konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina. Je to pravda pro spočetná sjednocení?

   Množina $A \subset X$ je řídká v (X, ρ), jestliže $X \setminus \overline{A}$ je hustá v X.

   Množina $B \subset X$ je hustá v (X, ρ), jestliže $\overline{B} = X$.

   Řešení: Nechť A_1 a A_2 jsou řídké množiny v (X, ρ). Pak pro $A_1 \cup A_2$ máme

   $$X \setminus (\overline{A_1 \cup A_2}) = X \setminus (\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = (X \setminus \overline{A_1}) \cap (X \setminus \overline{A_2})$$

   Navíc platí, že $(X \setminus \overline{A_1})$ i $(X \setminus \overline{A_2})$ je otevřená a hustá množina. Z věty z přednášky platí, že průnik takových dvou množin je také hustá množina. Tedy $A_1 \cup A_2$ je řídká množina.

   Indukcí lze ukázat, že konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina.

   Pro spočetné sjednocení tvrzení neplatí. Uvažujme jednoprvkové množiny $\{q\}$, kde $q \in \mathbb{Q}$. Množiny jsou zjevně řídké v $\mathbb{R}$. Ale jejich spočetné sjednocení je celé $\mathbb{Q}$, což řídká množina není.