11. cvičení – Lagrangeovy multiplikátory

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí na množině M

   (a) $f(x,y,z) = x - 2y - 2z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

   Řešení:

   - Rovnici vazby můžeme psát ve tvaru

   $$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

   Označíme-li $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, lze vazebnou podmínku psát ve tvaru

   $$g(x,y,z) = 0,$$

   což znamená totéž jako rovnost $M = g^{-1}(0)$. Množina M je tedy uzavřená. Protože je zároveň omezená, neboť $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ určuje sféru se středem v počátku o poloměru 1, je M kompaktní. Funkce f je navíc spojitá na $\mathbb{R}^3$ (polynom), tedy nabývá na M extrémů.

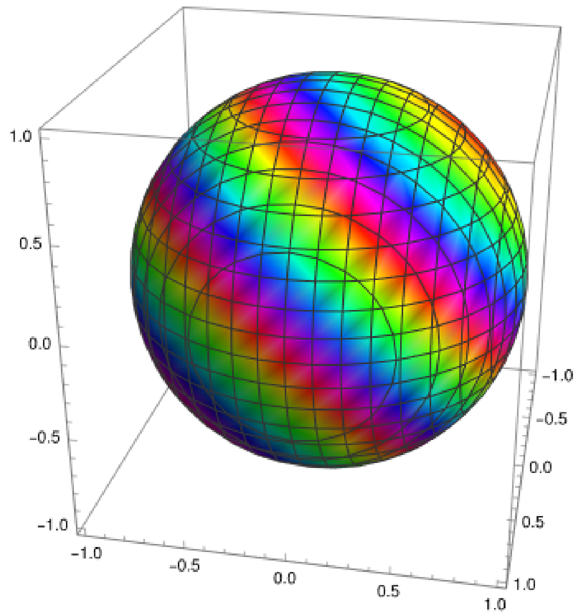


Figure 1: Obarvení sféry naznačuje funkční hodnotu

   - Funkce f i funkce g jsou polynomy, jsou tedy nekonečněkrát diferencovatelné, tudíž třídy C^1 na $\mathbb{R}^3$. Jako otevřenou množinu G z věty o multiplikátorech (s jednou vazbou) lze tedy volit $G = \mathbb{R}^3$. Věta o multiplikátorech s jednou vazbou potom říká, že vázaný extrém vzhledem k množině $M = g^{-1}(0)$ může mít funkce f pouze v těch bodech vazby, kde má funkce g nulový gradient nebo v bodech (x,y,z), pro které existuje reálné číslo λ takové, že soustava rovnic o čtyřech neznámých x,y,z,λ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial x} &= 0\\
\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial y} &= 0\\
\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial z} &= 0\\
g(x,y,z) &= 0
\end{aligned}$$

má řešení (x,y,z,λ).

– Vyšetřeme nejprve body, kde má vazebná funkce g nulový gradient. Protože

$$\nabla g=\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right),$$

kde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2-1\right)=2x+0+0-0=2x,\\
\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2-1\right)=0+2y+0-0=2y,\\
\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2-1\right)=0+0+2z-0=2z,
\end{aligned}$$

máme, že

$$\nabla g=\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right)=(2x,2y,2z).$$

Vektor $(2x,2y,2z)$ je nulovým vektorem $(0,0,0)$ pouze v bodě $x=0$, $y=0$, $z=0$, který ale není bodem vazby, neboť $g(0,0,0)=0^2+0^2+0^2-1=-1\neq 0$. Tento případ nám tedy nedává žádný podezřelý bod.

– Vyšetřeme nyní výše uvedenou soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial x} &= 0\\
\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial y} &= 0\\
\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial z} &= 0\\
g(x,y,z) &= 0
\end{aligned}$$

Parciální derivace vazebné funkce g už jsme vypočetli výše. Parciální derivace funkce f jsou

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x-2y-2z)=1-0-0=1,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x-2y-2z)=0-2-0=-2,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x - 2y - 2z) = 0 - 0 - 2 = -2,$$

zmíněná soustava rovnic má tedy tvar

$$\begin{aligned} 1 + \lambda \cdot 2x &= 0 \\ -2 + \lambda \cdot 2y &= 0 \\ -2 + \lambda \cdot 2z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních tří rovnic můžeme vyjádřit, že

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda}, \quad z = \frac{1}{\lambda}$$

a dosazením do poslední rovnice (vazby) dostaneme, že

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 1 = 0,$$

odkud vyplývá, že

$$\lambda^2 = \frac{9}{4} \implies \lambda_{1,2} = \pm\frac{3}{2}.$$

Po dosazení do výrazů pro x, y, z dostáváme dva podezřelé body $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ a $[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$.

Funkční hodnoty v podezřelých bodech jsou

$$f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -3,$$

$$f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 3.$$

Protože funkce f je spojitá a M kompaktní, musí f na M nabývat svého maxima i minima a to v některém ze dvou bodů výše. Zjevně tedy v bodě $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ nabývá minima -3 a v bodě $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ maxima 3.

(b) $f(x, y) = x^2 + y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

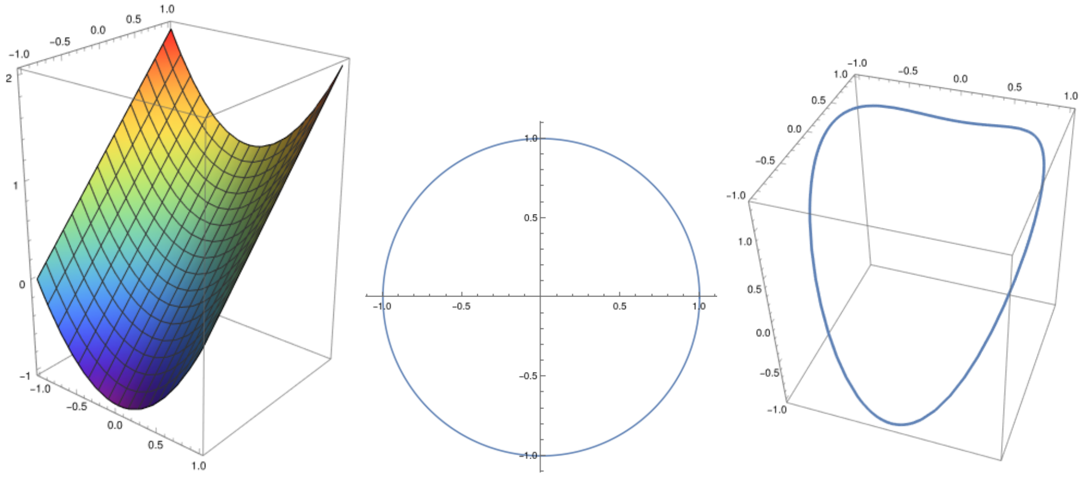
Řešení:

Zdroj: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

- Označme $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x, y) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
  Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená. M je navíc omezená - jde o kružnici se středem v počátku a poloměrem 1. Tedy M je kompakt.
  Tedy funkce f nabývá na M extrémů.
- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

    $$\nabla g = (2x, 2y) = (0, 0).$$

    Tedy $(x, y) = (0, 0)$. Tento bod ale neleží v M.



– Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0\\ g(x,y) &= 0\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}2x + \lambda \cdot 2x &= 0\\ 1 + \lambda \cdot 2y &= 0\\ x^2 + y^2 - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Z první rovnice máme

$$2x(1+\lambda) = 0.$$

Tedy $x = 0$ nebo $\lambda = -1$.
Pokud $x = 0$, tak z vazební podmínky je

$$y^2 = 1$$

tedy máme podezřelé body $[0,1]$ a $[0,-1]$.
Pokud $\lambda = -1$, tak z druhé rovnice je $y = \frac{1}{2}$. Z vazební podmínky pak máme podezřelé body $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ a $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned}f(0,1) &= \quad 1\\ f(0,-1) &= \ -1\\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \quad \frac{5}{4}\\ f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \quad \frac{5}{4}\end{aligned}$$

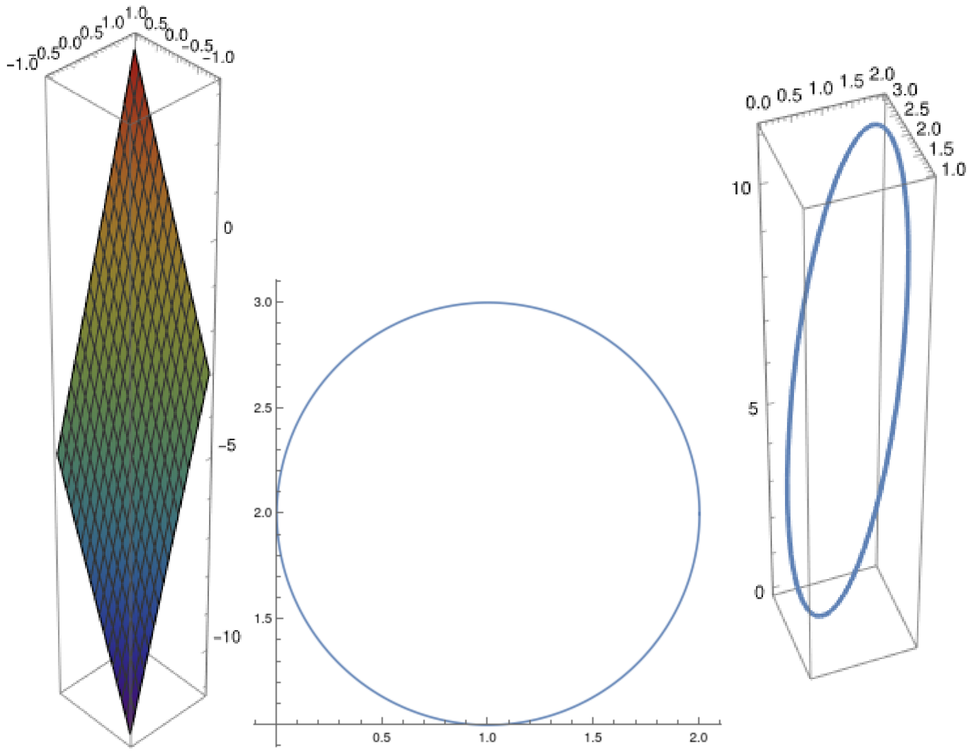
Tedy funkce nabývá minima v bodě $[0,-1]$ s hodnotou -1 a maxima v bodech $[\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}]$ s hodnotou $\frac{5}{4}$.

(c) $f(x,y)=4x+3y-4,\ M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+(y-2)^2=1\}$

Řešení:

Zdroj: `http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf`

- Označme $g(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2-1$ a $G=\mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x,y)=0$. Navíc $f,g\in\mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
  Dále $M=g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená. M je navíc omezená - jde o kružnici se středem v bodě $[1,2]$ a poloměrem 1. Tedy M je kompakt.
  Tedy funkce f nabývá na M extrémů.



- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g=(2x-2,2y-4)=(0,0).$$

  Tedy $(x,y)=(1,2)$. Tento bod ale neleží v M.

– Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} 4 + \lambda \cdot 2(x-1) &= 0 \\ 3 + \lambda \cdot 2(y-2) &= 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$x - 1 = -\frac{2}{\lambda}$$
$$y - 2 = -\frac{3}{2\lambda}$$

(Vyloučili jsme možnost $\lambda = 0$, protože nesplňuje soustavu rovnic.)
Dosazením do vazební podmínky získáme

$$\lambda = \pm\frac{5}{2}$$

tedy máme podezřelé body $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ a $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right) &= 1 \\ f\left(\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right) &= 11 \end{aligned}$$

Tedy funkce nabývá minima v bodě $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ s hodnotou 1 a maxima v bodě $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$. s hodnotou 11.

(d) $f(x,y,z) = x - y + 3z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$
Řešení:
Zdroj: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

- Označme $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x,y,z) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
  Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená. M je navíc omezená - jde o povrch elipsoidu se středem v počátku, který se vejde do koule $B(o, 3)$. Tedy M je kompakt.
  Tedy funkce f nabývá na M extrémů.
- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).

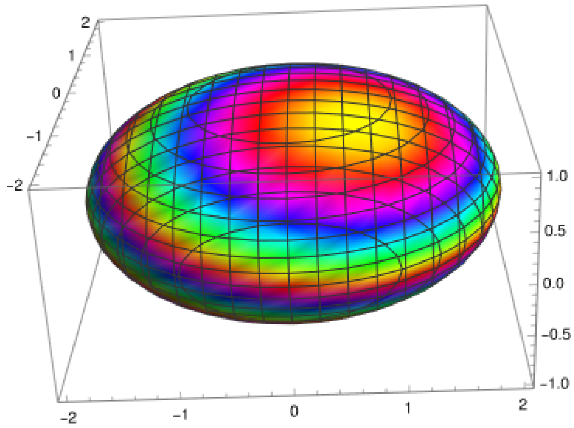


Figure 2: Obarvení povrchu naznačuje funkční hodnotu

– Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g = (2x, 2y, 4z) = (0, 0, 0).$$

Tedy $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Tento bod ale neleží v M.

– Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} 1 + \lambda \cdot 2x &= 0 \\ -1 + \lambda \cdot 2y &= 0 \\ 3 + \lambda \cdot 8z &= 0 \\ x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$x = -\frac{1}{2\lambda}$$
$$y = \frac{1}{2\lambda}$$
$$z = -\frac{3}{8\lambda}$$

(Vyloučili jsme možnost $\lambda = 0$, protože nesplňuje soustavu rovnic.)

Dosazením do vazební podmínky získáme

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{8}$$

tedy máme podezřelé body $[\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}]$. a $[-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right) &= \quad \sqrt{17} \\ f\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}\right) &= \ -\sqrt{17} \end{aligned}$$

  Tedy funkce nabývá minima v bodě $\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}\right)$ s hodnotou $-\sqrt{17}$ a maxima v bodě $\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right)$ s hodnotou $\sqrt{17}$.

(e) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 1, x^2 + y^2 = 1\}$
Řešení:
Zdroj: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

- Označme $g_1(x,y,z) = x - y + z - 1$, $g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^3$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g_1(x,y,z) = 0$ a zároveň $g_2(x,y,z) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
  Dále uvažujme $M_1 = g_1^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M_1 uzavřená. Analogicky Dále uvažujme $M_2 = g_2^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M_2 uzavřená. Protože $M = M_1 \cap M_2$, jde o průnik dvou uzavřených, tedy je také uzavřená. M je navíc omezená - jde o průnik válce a roviny. Máme tedy $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, odsud $-1 \leq z \leq 3$. Tedy M je kompakt.
  Tedy funkce f nabývá na M extrémů.

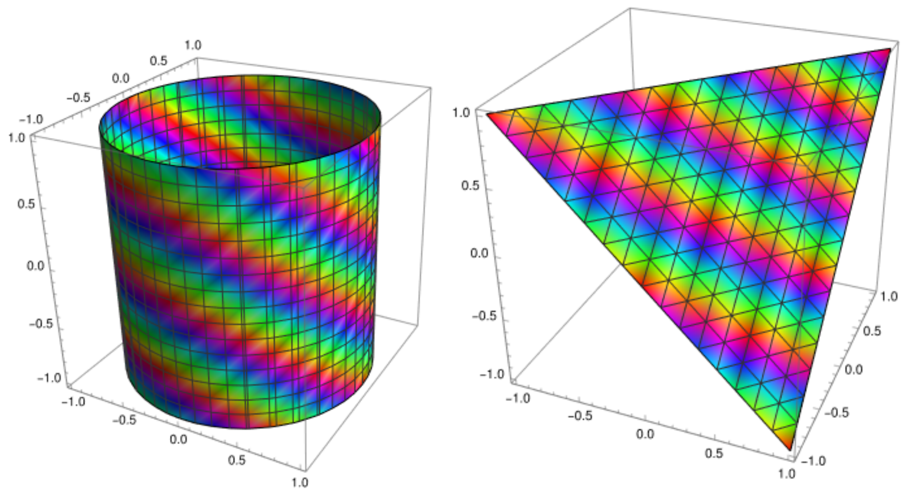


Figure 3: Obarvení povrchu naznačuje funkční hodnotu

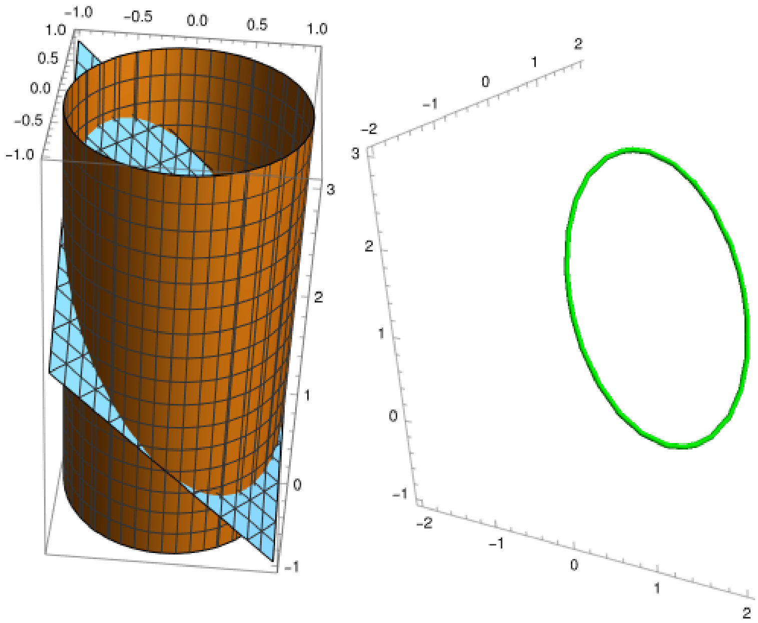


Figure 4: Takto vypadá vazba

- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetřeme body, kde jsou vektory ∇g_1 a ∇g_2 lineárně nezávislé. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g_1 = (1, -1, 1) = k \nabla g_2 = (2x, 2y, 0)$$

    Tedy $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Tento bod ale neleží v M.
  - Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátory λ a μ.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y} + \mu \cdot \frac{\partial g_2}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y} + \mu \cdot \frac{\partial g_2}{\partial z} &= 0 \\
g(x, y, z) &= 0
\end{aligned}$$

    Tedy

$$\begin{aligned}
1 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 2x &= 0 \\
2 + \lambda \cdot -1 + \mu \cdot 2y &= 0 \\
3 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 &= 0 \\
x - y + z - 1 &= 0 \\
x^2 + y^2 - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Ze třetí rovnice máme, že $\lambda = -3$. Z prvních dvou rovnic máme

$$x = \frac{1}{\mu}$$
$$y = -\frac{5}{2\mu}$$

(Vyloučili jsme možnost $\mu = 0$, protože nesplňuje soustavu rovnic.)
Dosazením do vazební podmínky získáme

$$\mu = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

tedy máme podezřelé body $[\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}]$ a $[-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}\right) &= 3 - \sqrt{29} \\ f\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}\right) &= 3 + \frac{9}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

Tedy funkce nabývá minima v bodě $\left[\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}\right]$ s hodnotou $3 - \sqrt{29}$ a maxima v bodě $\left[-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}\right]$ s hodnotou $3 + \frac{9}{\sqrt{29}}$

(f) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0\}$
Řešení:
Zdroj: https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf

- Označme $g(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x, y) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená.
M je navíc omezená - jde o pootočenou elipsu (to by se ukázalo, kdybychom „otočili“ soustavu souřadnic). Omezenost plyne z těchto odhadů:

$$5(x^2 + y^2) = 4 + 6xy \leq 4 + 3(x^2 + y^2)$$

tedy

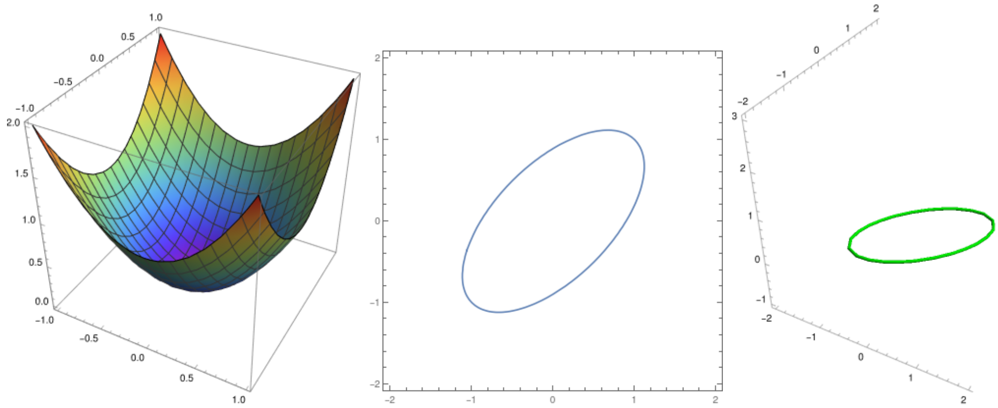
$$2(x^2 + y^2) \leq 4$$

Tedy M je kompakt.
Tedy funkce f nabývá na M extrémů.

- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetříme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g = (10x - 6y, -6x + 10y) = (0, 0).$$

Tedy $(x, y) = (0, 0)$. Tento bod ale neleží v M.



– Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} 2x + \lambda \cdot (10x - 6y) &= 0 \\ 2y + \lambda \cdot (-6x + 10y) &= 0 \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$\begin{aligned} x(5\lambda + 1) = 3\lambda y \\ y(5\lambda + 1) = 3\lambda x \end{aligned}$$

Vyloučíme možnost $\lambda = 0$, protože pak by byl řešením bod $(0,0)$, který nesplňuje vazební podmínku. Analogicky vyloučíme možnost $(5\lambda + 1) = 0$. Uvažujeme-li $x = 0$, tak opět vyjde řešení $(0,0)$. Analogicky pro $y = 0$. Můžeme tedy obě rovnice vynásobit postupně y a x. Dostaneme

$$\begin{aligned} yx(5\lambda + 1) = 3\lambda y^2 \\ xy(5\lambda + 1) = 3\lambda x^2 \end{aligned}$$

Tedy $y = \pm x$.
Dosazením do vazební podmínky získáme pro $y = x$

$$5x^2 - 6x^2 + 5x^2 - 4 = 0$$

a pro $y = -x$

$$5x^2 + 6x^2 + 5x^2 - 4 = 0$$

tedy máme podezřelé body $[1,1]$, $[-1,-1]$, $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f(1,1) = & \quad 2 \\ f(-1,-1) = & \quad 2 \\ f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = & \quad \frac{1}{2} \\ f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = & \quad \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Tedy funkce nabývá minima v bodech $[\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]$ a $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ s hodnotou $\frac{1}{2}$ a maxima v bodech $[1,1]$, $[-1,-1]$ s hodnotou 2.

Zkouškové příklady

Zdroj: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/vyuka.php

2. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x,y,z) = xy + yz$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 1\}$
   (b) $f(x,y,z) = z + e^{xy}$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, x^2+y^2 = z^2\}$
   (c) $f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, x = y^2+z^2\}$
3. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x,y) = x^4 y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$
   (b) $f(x,y) = 2x + 4y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
   (c) $f(x,y,z) = e^{-z^2}(x^2+y^2+xy)$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, |z| \leq 1\}$
   (d) $f(x,y) = (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$
4. Určete maximální možný objem kvádru, jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, jeden jeho vrchol leží v počátku a diagonálně protilehlý vrchol leží v množině $M = \{[x,y,z], x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4x + 2y + z = 2.\}$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi''(x)\log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right)$$

$$+e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2$$

$$+e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad E4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce g_1, g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ stejně jako funkce f. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1,\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 1,\\
&\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 1.
\end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1,1,1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

(1) $$y = \lambda_1 2x + \lambda_2,$$

(2) $$x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2,$$

(3) $$y = \lambda_1 2z + \lambda_2,$$

(4) $$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

(5) $$x + y + z = 1.$$

Z (1) a (3) vyplývá $\lambda_1 x = \lambda_1 z$. To znamená, že máme dvě možnosti: buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x = z$.

V prvním případě dostaneme nejprve z (1) $y = \lambda_2$. Odtud a z (2) obdržíme $x + z = y$. Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[(1-\sqrt{5})/4, 1/2, (1+\sqrt{5})/4\right], \qquad \left[(1+\sqrt{5})/4, 1/2, (1-\sqrt{5})/4\right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0, 1, 0], \qquad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $[2/3, -1/3, 2/3]$ a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

Příklad E5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. My budeme hledat primitivní funkci na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Použijeme substituci $\cos x = t$. Dostaneme $-\sin x\, dx = dt$. Nyní je třeba spočítat:

$$\int \frac{-1}{t+t^3}\, dt.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\begin{aligned}\int \frac{-1}{t+t^3}\, dt &= \int \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\, dt - \int \frac{1}{t}\, dt \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\log(1+t^2) - \log|t|, \qquad t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } t \in (0, +\infty).\end{aligned}$$

Podle věty o substituci máme:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\log(1+\cos^2 x) - \log|\cos x|, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Určitý integrál spočteme pomocí právě vypočtené primitivní funkce a dostaneme

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx = \frac{1}{2}\log\frac{5}{2}.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad 1 : Nalezněte matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = (\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^4. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

(2b)

$$f(x, y, z) = z + e^{xy} \qquad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x + 1)(x^2 + 2x + 4)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad G1 : Standardním postupem obdržíme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot x - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) = 0,$$
$$\begin{aligned} e^{\sin x^2} \cdot (\cos x^2 \cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2} \cdot \sin x^2 \cdot 4x^2 \\ + e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)} (\cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2 \\ - e^{\sin x\varphi(x)} \sin x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) \\ -2\varphi''(x) = 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$.

Příklad G4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

2

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Funkce f, g_1 i g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{xy}y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{xy}x, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 2y, \\ &\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = -2z. \end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(2x, 2y, -2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \tag{1}$$
$$e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \tag{2}$$
$$1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{4}$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{5}$$

Z (4) a (5) vyplývá, že $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Odečteme-li (1) od (2) dostaneme

$$e^{xy}(x-y) = -2(\lambda_1 + \lambda_2)(x-y).$$

Z poslední rovnice plyne, že buď $x = y$ nebo $e^{xy} = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$. V prvním případě dopočítáme ze (4) tyto podezřelé body

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Ve druhém případě dosadíme za e^{xy} do (1) a dostaneme

$$-2y(\lambda_1 + \lambda_2) = 2x(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Nyní máme opět dvě možnosti: buď $x = -y$ nebo $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. První možnost dává podezřelé body

$$[1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Druhá možnost spolu s (1) a (2) dává $x = y = 0$. Toto však nemůže nastat vzhledem ke (4) a (5).

Funkce f nabývá maxima v bodech

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \qquad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}]$$

a minima

$$[-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \qquad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Příklad G5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Provedeme rozklad integrandu na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x^2+5x+5}{(x+1)(x^2+2x+4)}\,dx = \int \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x+1} + \frac{4x+7}{x^2+2x+4}\right)dx \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{3}{x^2+2x+4}\,dx \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{((x+1)/\sqrt{3})^2+1}\,dx \\
&\overset{c}{=} \frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{2}{3}\log(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right), \\
&x \in (-\infty, -1) \text{ nebo } x \in (-1, +\infty).
\end{aligned}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnost matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, určete kde existují vlastní parciální derivace a spočtěte je; napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x \cos y) & x \geq 0 \\ \cos(x \sin y) + 2 & x < 0 \end{cases}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$$
$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = y^2 + z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad H1 : Pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnost matice, dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & x & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & x-2 & x-1 \end{pmatrix}.$$

proměnné x, která je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\arcsin(x + (\varphi(x))^2) + \pi/2 - \arccos(\varphi(x) + x^2) = 0,$$
$$\frac{1 + 2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1-(x+(\varphi(x))^2)^2}} + \frac{\varphi'(x) + 2x}{\sqrt{1-(\varphi(x)+x^2)^2}} = 0,$$
$$-\frac{1}{2}(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(x+(\varphi(x))^2)) \cdot (1+2\varphi(x)\varphi'(x))^2$$
$$+(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x))$$
$$-\frac{1}{2}(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(\varphi(x)+x^2)) \cdot (\varphi'(x)+2x)^2$$
$$+(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\varphi''(x)+2) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a využijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = -4$.

2c

Příklad H4 : Položme

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x - y^2 - z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^n$ vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f,\ g_1,\ g_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2z \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = 2y \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = -2y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = 2x + 1 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y) = 2z \qquad \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y) = -2z$$

Zkoumejme pro která $[x,y,z] \in M$ jsou vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1, -2y, -2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnost následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je menší než 2, právě když $x = -\frac{1}{2}$ nebo $y = z = 0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M.

Nyní řešme soustavu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{1}$$

$$x = y^2 + z^2 \tag{2}$$

$$2x + 2z = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \tag{3}$$

$$2y = 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y \tag{4}$$

$$2x + 1 = 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 z \tag{5}$$

Z (1) a (2) vyplývá $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Vzhledem k (2) musí být x nezáporné a proto nás zajímá pouze kladný kořen kvadratické rovnice, tj.

$$x = (\sqrt{5} - 1)/2. \tag{6}$$

Z (4) vyplývá, že buď $y = 0$ nebo $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$. V prvním případě vypočteme z (2) a (6), že $z = \pm\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$. Odtud dostáváme podezřelé body

$$\left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}\right], \qquad \left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, -\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}\right].$$

Ve druhém případě plyne z (5) $x + \frac{1}{2} = z$. Takže $z = \sqrt{5}/2$. Z (2) plyne $y^2 = x - z^2$. Po dosazení máme $y^2 = (2\sqrt{5} - 7)/4 < 0$ – což není možné.

Dosazením zjistíme, že funkce f nabývá na M svého maxima v prvním podezřelém bodě a minima ve druhém.

Příklad H5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$. Pak dostaneme

$$x = \frac{1 - t^2}{2t - 1}, \qquad dx = \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(2t - 1)^2}\, dt.$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{2t-1} + 1}{\frac{1-t^2}{2t-1} + t} \cdot \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(2t - 1)^2}\, dt = \int \frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2}\, dt$$

Platí

$$\frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{4t + 1}{(2t - 1)^2}$$

Rozložíme-li druhý výraz na parciální zlomky dostaneme

$$\int \frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2}\, dt = \int \frac{1}{2}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{3}{(2t - 1)^2}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2t - 1}\, dt$$

$$\stackrel{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{3}{8t - 4} - \frac{1}{2}\log|2t - 1|, \quad t \in (-\infty, 1/2) \text{ nebo } t \in (1/2, +\infty).$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$$

$$+ \frac{3}{8(\sqrt{x^2 + x + 1} - x) - 4} - \frac{1}{2}\log|2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

3a

Příklad A4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0,y];\ y \in (-2,2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^4 + y^4 = 16, x > -1\}, \qquad H_2 = \{[-1,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^4 + y^4 - 16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y^3, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned} &(1) & x^4 + y^4 &= 16,\\ &(2) & 4x^3y &= \lambda 4x^3,\\ &(3) & x^4 &= \lambda 4y^3. \end{aligned}$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \pm 2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$.

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1,y) = y, \qquad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \qquad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$ a minima v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$.

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 8x^3y + 3x^2 + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^4 + 3y^2 + x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(1,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0,$$
$$8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$
$$24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)$$
$$+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

3b

Příklad B4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M. Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0,\ y > 0\},$$
$$H_2 = \{[0,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle 0,1 \rangle\},$$
$$H_3 = \{[x,0] \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle 0,1 \rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1$ na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

(1) $$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1,$$

(2) $$2 = \lambda\frac{1}{4}x^{-3/4},$$

(3) $$4 = \lambda\frac{1}{4}y^{-3/4}.$$

Z (2) a (3) vyplývá, že $x = 2\sqrt[3]{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[\frac{2^{4/3}}{(2^{1/3}+1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3}+1)^4}\right].$$

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(0,y) = 4y, \qquad y \in \langle 0,1\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[0,1]$.

Podobně zkoumejme chování na množině H_3. Funkce f má na H_3 tvar:

$$f(x,0) = 2x, \qquad x \in \langle 0,1\rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[1,0]$.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $[0,1]$ a minima v bodě $[0,0]$.

Příklad B5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Nyní integrujme jednotlivé parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x+1}\,dx &\overset{c}{=} \log|x+1|,\\
\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}\\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4}\\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{((2x+1)/\sqrt{3})^2+1}\\
&\overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Dohromady tedy máme

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx \overset{c}{=} \log|x+1| + \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$.

v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x)))+\varphi(x)=0,$$

$$\frac{1}{x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x))}\cdot(2x+2\varphi(x)\varphi'(x)-\sin(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x)))+\varphi'(x)=0,$$

$$\frac{-1}{(x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x)))^2}\cdot(2x+2\varphi(x)\varphi'(x)-\sin(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x)))^2$$
$$+\frac{1}{x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x))}\cdot(2+2(\varphi'(x))^2+2\varphi(x)\varphi''(x)$$
$$-\cos(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2-\sin(x\varphi(x))(2\varphi'(x)+x\varphi''(x)))+\varphi''(x)=0.$$

Dosadíme-li $x=0$ a použijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=0$ a $\varphi''(0)=-2$.

3c

Příklad C4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny M je prázdný. Z tvaru funkce f vyplývá, že

$$f(x,y,1)=f(x,y,-1)<f(x,y,z)<f(x,y,0),\qquad [x,y,z]\in\mathbb{R}^3,\ z\in(-1,1)\setminus\{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině $M\cap\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ z=0\}$ a minima na množině $M\cap\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ z=-1 \text{ nebo } z=1\}$. Položme $g(x,y)=x^2+xy+y^2$ a vyšetřujme extrémy g na množině $H=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $h(x,y)=x^2+y^2-1$. Platí $g,h\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce h platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=2x,\qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=2y.$$

Pro každé $[x,y]\in H$ máme $\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y),\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)\neq(0,0)$. Řešme následující soustavu

(1) $$x^2+y^2=1,$$
(2) $$2x+y=\lambda 2x,$$
(3) $$x+2y=\lambda 2y.$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme

$$(3-2\lambda)(x+y)=0.$$

To znamená, že buď $x=-y$ nebo $\lambda=3/2$. V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body $[1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$. Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme $x=y$ a (1) dává podezřelé body $[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$. Funkce g nabývá minima na množině H v bodech $[1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$ a maxima v bodech $[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$.

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce f nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},-1],\ [1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},-1],\ [-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1],\ [1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},1]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0], \ [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0].$$

Příklad C5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx+D}{x^2+x+4}.$$

Vyřešením odpovídající soustavy lineárních rovnic dostaneme rozklad

$$\frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2x+31}{x^2+x+4}.$$

Integrace prvních dvou parciálních zlomků je snadná. Integrujme

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+31}{x^2+x+4}\,dx &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx + 30 \int \frac{1}{(x+1/2)^2 + 15/4}\,dx \\
&= \log(x^2+x+4) + 8 \int \frac{1}{\left((2x+1)/\sqrt{15}\right)^2 + 1}\,dx \\
&\overset{c}{=} \log(x^2+x+4) + 4\sqrt{15}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)
\end{aligned}$$

Dohromady máme

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}\,dx \overset{c}{=} -\frac{1}{x-2} + \frac{8}{5}\log|x-2| \\
+ \frac{1}{5}\log(x^2+x+4) + \frac{4\sqrt{15}}{5}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)
\end{aligned}$$

pro $x \in (-\infty, 2)$ nebo $x \in (2, +\infty)$.

3a)

Příklad F4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny M. Pro parciální derivace funkce f platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y).$$

Uvnitř množiny M hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z M, které splňují

$$2x(1-2(x^2+7y^2)) = 0,$$
$$2y(7-(x^2+7y^2)) = 0.$$

Řešením této soustavy jsou body $[0,0]$, $[1/\sqrt{2},0]$, $[-1/\sqrt{2},0]$, $[0,1]$, $[0,-1]$, pouze první tři však leží uvnitř množiny M.

Podezřelé body na hranici M hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina $H(M)$ je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1.$$

Funkce f i g jsou třídy $C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 8y.$$

Vektor $(2x, 8y)$ je nulový, právě když $[x,y] = [0,0]$. Tento bod ovšem neleží na hranici množiny M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$(1) \qquad 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x) = 2\lambda x,$$
$$(2) \qquad 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 8\lambda y,$$
$$(3) \qquad x^2 + 4y^2 = 1.$$

Z (1) vyplývá, že $x = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = \lambda$ a z (2) vyplývá, že $y = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)) = 4\lambda$. Pokud $x = 0$, pak podle (3) je $y = \pm 1/2$. Pokud $y = 0$, pak podle (3) je $x = \pm 1$. V případě, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$, musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)).$$

Odtud plyne $7(x^2+7y^2) = -3$, což je spor.

Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0,0], \ [1/\sqrt{2},0], \ [-1/\sqrt{2},0], \ [0,1/2], \ [0,-1/2], \ [1,0], \ [-1,0].$$

Funkce f nabývá maxima v bodech $[0,1/2]$, $[0,-1/2]$ a minima v bodě $[0,0]$.

4 kvádr A-H, $A = [0,0,0]$

$G \in M$:

$$M = \{[x,y,z] : 4x+2y+z=2,\ x,y,z \geq 0\}$$

Cíl: max objem

$G = [x_0, y_0, z_0]$

hledáme max $f(x,y,z) = xyz$ (mělo by být $|xyz|$, ale naše $x,y,z \geq 0$)

$$g(x,y,z) = 4x+2y+z-2$$

(1) $\nabla g = (4,2,1) \neq 0$ nikdy

(2) $f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = 0$ $\quad xyz + \lambda(4x+2y+z-2) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $yz + 4\lambda = 0$ $\qquad\qquad yz - 4xy = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $xz + 2\lambda = 0$ $\qquad\qquad xz - 2xy = 0$

$\frac{\partial}{\partial z}$: $xy + \lambda = 0$ $\rightarrow \lambda = -xy \rightarrow$

navíc $4x+2y+z=0$ $\qquad\qquad 4x+2y+z=0$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} -yz+4xy=0 \\ 2xz-4xy=0 \end{array}\right\} \rightarrow 2xz - yz = 0 \rightarrow z(2x-y) = 0$$

$4x+2y+z=0$ $\qquad 4x+2y+z=0$ $\qquad 4x+2y+z=0$

(a) $z=0$ $\rightarrow$ tam max stejně nebude (místo kvádru by byl obdélník)

$\rightarrow$ (b) $\boxed{y=2x}$, $4x+2y+z=0$

$\to \quad 4x + 2\cdot 2x + z = 2$

$\to \boxed{2 - 8x = z}$ (a máme $y = 2x$)

dosadíme do $\boxed{xz - 2xy = 0}$

$\to x(2-8x) - 2x \cdot 2x = 0$

$2x - 8x^2 - 4x^2 = 0$

$2x(1-6x) = 0$

$x = 0$ (nebude max)

$\boxed{x = \frac{1}{6}}$ pak $\boxed{y = \frac{1}{3}}$ $\quad z = 2 - \frac{8}{6}$

$\boxed{z = \frac{2}{3}}$

(jen pro formu $\lambda = -xy$ $\quad \lambda = -\frac{1}{18}$).

Max. je v bodě $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

a hodnota je $\frac{2}{2\cdot 3\cdot 9} = \underline{\underline{\frac{1}{27}}}$

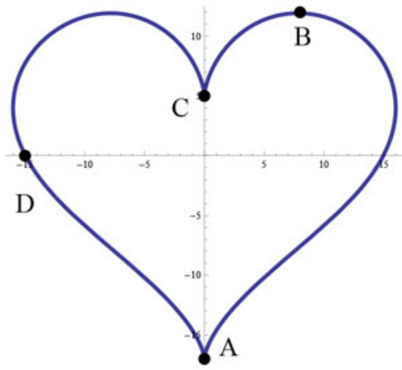
Bonusové příklady

5. Farmář a fařmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce tak, aby měl co největší plochu. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Ježto je u řeky, stačí jej oplotit ze 3 stran. Jaké bude zadání za pomoci Lagrangeových multiplikátorů?
   (a) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = 2x + y - 100$
   (b) $f(x, y) = 2x + 2y - 100$, $g(x, y) = xy$
   (c) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x + y - 100$
   (d) $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy - 100$

Figure 5: https://www.cbr.com/shaun-the-sheep-best-worst-episodes-imdb/

Řešení: (a)

6. Ve kterém z bodů A, B, C, D se nachází minimum funkce $f(x, y) = y$ vzhledem ke křivce na obrázku?



Zdroj: https://www.cpp.edu/conceptests/question-library/mat214.shtml
Řešení: A