



## 9. cvičení – Více implicitních funkcí

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1. Jsou dány vztahy

$$e^{u/x} \cos(v/y) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$e^{u/x} \sin(v/y) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu  $[1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]$  funkce  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$  třídy  $C^\infty$ . Spočtete parciální derivace  $\frac{\partial u}{\partial x}$  a  $\frac{\partial v}{\partial x}$ .

**Řešení:** Příklad i s řešením máme z: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>

- Uvažujme  $F : \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F : (F_1, F_2)$ , kde

$$F_1(x, y, u, v) = e^{u/x} \cos(v/y) - \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$F_2(x, y, u, v) = e^{u/x} \sin(v/y) - \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Pak  $F \in C^\infty((0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ .

Dále  $F(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) = [0, 0]$ .

Sestavme matici:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} e^{u/x} \cos(v/y) & -\frac{1}{y} e^{u/x} \sin(v/y) \\ \frac{1}{x} e^{u/x} \sin(v/y) & \frac{1}{y} e^{u/x} \cos(v/y) \end{pmatrix}$$

V bodě  $(1, 1, 0, \frac{\pi}{4})$  dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí  $U$  bodu  $(1, 1)$  a okolí  $V$  bodu  $(0, \frac{\pi}{4})$  takové, že pro každé  $(x, y) \in U$  existuje právě jedno  $(u, v) = \varphi(x, y) \in V$  splňující  $F(x, y, u, v) = 0$ . Označíme-li složky  $\varphi$  jako  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$ , dostáváme funkce třídy  $C^\infty$  na  $U$ .

- Zderivujme podle proměnné  $x$  rovnice :

$$e^{u/x} \cos(v/y) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$e^{u/x} \sin(v/y) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Dostáváme

$$e^{u/x} \frac{u_x x - u}{x^2} \cos(v/y) + e^{u/x} (-\sin(v/y)) \frac{1}{y} v_x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$e^{u/x} \frac{u_x x - u}{x^2} \sin(v/y) + e^{u/x} \cos(v/y) \frac{1}{y} v_x = 0$$

Dosadíme  $x = 1, y = 1, u(1, 1) = 0, v(1, 1) = \frac{\pi}{4}$ . Máme

$$\begin{aligned}u_x(1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} v_x(1, 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\u_x(1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} v_x(1, 1) &= 0.\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}u_x(1, 1) &= \frac{1}{2}, \\v_x(1, 1) &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Ukažte, že existují funkce  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$  definované na nějakém okolí  $U$  bodu  $[1, 2]$ , které jsou na  $U$  třídy  $C^1$ , splňují  $u(1, 2) = 0, v(1, 2) = 0$  a platí pro ně rovnice

$$\begin{aligned}xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x.\end{aligned}$$

Spočtěte  $u'(1, 2)$  a  $v'(1, 2)$ .

**Řešení:** Příklad i s řešením máme z: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>

- Uvažujme  $F : \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2, F : (F_1, F_2)$ , kde

$$\begin{aligned}F_1(x, y, u, v) &= xe^{u+v} + 2uv - 1 \\F_2(x, y, u, v) &= ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x.\end{aligned}$$

Pak  $F \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (-1, \infty))$ .

Dále  $F(1, 2, 0, 0) = [0, 0]$ .

Sestavme matici:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{pmatrix}$$

V bodě  $(1, 2, 0, 0)$  dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí  $U$  bodu  $(1, 2)$  a okolí  $V$  bodu  $(0, 0)$  takové, že pro každé  $(x, y) \in U$  existuje právě jedno  $(u, v) = \varphi(x, y) \in V$  splňující  $F(x, y, u, v) = 0$ . Označíme-li složky  $\varphi$  jako  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$ , dostáváme funkce třídy  $C^\infty$  na  $U$ .

- Zderivujme podle proměnné  $x$  rovnice :

$$\begin{aligned}xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x.\end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}e^{u+v} + xe^{u+v}(u_x + v_x) + 2u_xv + 2uv_x &= 0 \\ yu^{u-v}(u_x - v_x) - \frac{1}{(1+v)^2}(u_x(1+v) - uv_x) &= 2\end{aligned}$$

Dosadíme  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $u(1, 2) = 0$ ,  $v(1, 2) = 0$ . Máme

$$\begin{aligned}u_x + v_x &= -1 \\ u_x - 2v_x &= 2\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}u_x(1, 2) &= 0, \\ v_x(1, 2) &= -1.\end{aligned}$$

- Zderivujeme podle proměnné  $y$  rovnice :

$$\begin{aligned}xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x.\end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}xe^{u+v}(u_y + v_y) + 2u_yv + 2uv_y &= 0 \\ e^{u-v} + yu^{u-v}(u_y - v_y) - \frac{1}{(1+v)^2}(u_y(1+v) - uv_y) &= 0\end{aligned}$$

Dosadíme  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $u(1, 2) = 0$ ,  $v(1, 2) = 0$ . Máme

$$\begin{aligned}u_y + v_y &= 0 \\ u_y - 2v_y &= -1\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}u_y(1, 2) &= -\frac{1}{3}, \\ v_y(1, 2) &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

- Tedy  $u'(1, 2) = (0, -\frac{1}{3})$ ,  $v'(1, 2) = (-1, \frac{1}{3})$ .

3. Dokažte, že existují funkce  $z(x, y)$  a  $t(x, y)$ , které jsou třídy  $C^\infty$  na nějakém okolí  $U$  obsahujícím  $[1, -1]$  a splňují rovnice

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 &= 0 \\ x + y + z - t - 2 &= 0,\end{aligned}$$

spolu se vztahy  $z(1, -1) = 2$  a  $t(1, -1) = 0$ .

Spočtete  $z''(1, -1)$ .

**Řešení:** Příklad i s řešením máme z: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analzya.pdf>

- Uvažujme  $F : \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F : (F_1, F_2)$ , kde

$$F_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3$$

$$F_2(x, y, z, t) = x + y + z - t - 2,$$

Pak  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ .

Dále  $F(1, -1, 2, 0) = [0, 0]$ .

Sestavme matici:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z & -3t^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

V bodě  $(1, -1, 2, 0)$  dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí  $U$  bodu  $(1, -1)$  a okolí  $V$  bodu  $(2, 0)$  takové, že pro každé  $(x, y) \in U$  existuje právě jedno  $(z, t) = \varphi(x, y) \in V$  splňující  $F(x, y, z, t) = 0$ . Označíme-li složky  $\varphi$  jako  $z(x, y)$  a  $t(x, y)$ , dostáváme funkce třídy  $C^\infty$  na  $U$ .

- Zderivujme podle proměnné  $x$  rovnice :

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0$$

$$x + y + z - t - 2 = 0,$$

Dostáváme

$$2x - zz_x - 3t^2 t_x = 0$$

$$1 + z_x - t_x = 0$$

Dosadíme  $x = 1$ ,  $y = -1$ ,  $z(1, -1) = 2$ ,  $t(1, -1) = 0$ . Máme

$$-2z_x = -2$$

$$z_x - t_x = -1$$

Odtud

$$z_x(1, -1) = 1,$$

$$t_x(1, -1) = 2.$$

- Zderivujme podle proměnné  $y$  rovnice :

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0$$

$$x + y + z - t - 2 = 0,$$

Dostáváme

$$2y - zz_y - 3t^2 t_y = 0$$

$$1 + z_y - t_y = 0$$

Dosadíme  $x = 1, y = -1, z(1, -1) = 2, t(1, -1) = 0$ . Máme

$$\begin{aligned} -2z_y &= 2 \\ z_y - t_y &= -1 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} z_y(1, -1) &= -1, \\ t_y(1, -1) &= 0. \end{aligned}$$

- Rovnice zderivujeme ještě jednou. Dostáváme

$$\begin{aligned} 2 - (z_x)^2 - zz_{xx} - 6t(t_x)^2 - 3t^2t_{xx} &= 0, \\ z_{xx} - t_{xx} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - (z_y)^2 - zz_{yy} - 6t(t_y)^2 - 3t^2t_{yy} &= 0, \\ z_{yy} - t_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -z_yz_x - zz_{xy} - 6tt_yt_x - 3t^2t_{xy} &= 0 \\ z_{xy} - t_{xy} &= 0, \end{aligned}$$

Dosadíme a získáme

$$\begin{aligned} z_{xx}(1, -1) &= \frac{1}{2} \\ z_{yy}(1, -1) &= \frac{1}{2} \\ z_{xy}(1, -1) &= \frac{1}{2} \\ t_{xx}(1, -1) &= \frac{1}{2} \\ t_{yy}(1, -1) &= \frac{1}{2} \\ t_{xy}(1, -1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Závěr:

$$z''(1, -1)(h_1, h_2) = \frac{1}{2}h_1^2 + h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2$$

4. Ukažte, že rovnice

$$\begin{aligned} x &= u + v^2 \\ y &= u^2 - v^3 \end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu  $[3, 3]$  funkce  $u(x, y), v(x, y)$  třídy  $C^\infty$ , které splňují  $u(3, 3) = 2, v(3, 3) = 1$ . Spočtěte  $z_{xy}(3, 3)$ , pokud  $z = 2uv$ .

**Řešení:** Příklad i s řešením máme z: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>

- Uvažujme  $F : \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2, F : (F_1, F_2)$ , kde

$$\begin{aligned} F_1(x, y, u, v) &= x = u + v^2 \\ F_2(x, y, u, v) &= y = u^2 - v^3 \end{aligned}$$

Pak  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ .

Dále  $F(3, 3, 2, 1) = [0, 0]$ .

Sestavme matici:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2v \\ -2u & 3v^2 \end{pmatrix}$$

V bodě  $(3, 3, 2, 1)$  dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí  $U$  bodu  $(3, 3)$  a okolí  $V$  bodu  $(2, 1)$  takové, že pro každé  $(x, y) \in U$  existuje právě jedno  $(u, v) = \varphi(x, y) \in V$  splňující  $F(x, y, u, v) = 0$ . Označíme-li složky  $\varphi$  jako  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$ , dostáváme funkce třídy  $C^\infty$  na  $U$ .

- Platí

$$z_{xy} = 2(u_{xy}v + u_x v_y + u_y v_x + uv_{xy})$$

Odtud plyne, které derivace funkcí  $u$  a  $v$  potřebujeme dopočítat.

- Zderivujeme podle proměnné  $x$  rovnice :

$$\begin{aligned} x &= u + v^2 \\ y &= u^2 - v^3 \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} u_x + 2vv_x &= 1 \\ 2uu_x - 3v^2v_x &= 0 \end{aligned}$$

- Zderivujeme podle proměnné  $y$ :

$$\begin{aligned} u_y + 2vv_y &= 0 \\ 2uu_y - 3v^2v_y &= 1 \end{aligned}$$

Dosadíme  $x = 3, y = 3, u(3, 3) = 2, v(3, 3) = 1$ . Máme

Odtud

$$\begin{aligned} u_x(3, 3) &= \frac{3}{11}, \\ v_x(3, 3) &= \frac{4}{11}, \\ u_y(3, 3) &= \frac{2}{11}, \\ v_y(3, 3) &= \frac{-1}{11}, \end{aligned}$$

- Ještě jednou zderivujeme:

$$\begin{aligned} u_{xy} + 2v_x v_y + 2v v_{yx} &= 0 \\ 2u_x u_y + 2u u_{yx} - 6v v_x v_y - 3v^2 v_{yx} &= 0 \end{aligned}$$

Po dosazení vyjde

$$u_{yx}(3, 3) = \frac{224}{11^3},$$
$$v_{yx}(3, 3) = -\frac{68}{11^3}.$$

- Ze záměnnosti parciálních derivací můžeme dosadit a získáme

$$z_{xy}(3, 3) = \frac{26}{11}$$

5. Spočtete  $x_v$ ,  $y_v$  a  $z_v$ , pokud

$$u = x^2 + y^2,$$
$$v = x^2 - 2xy^2,$$
$$z = \ln(y^2 - x^2)$$

v bodě  $u = 5$ ,  $v = -7$ ,  $x(5, -7) = 1$  a  $y(5, -7) = 2$ .

(Rada: Prve řešte první dvě rovnice pomocí Věty o implicitních funkcích,  $z_v$  pak vyjádřete řetízkovým pravidlem.)

**Řešení:** Příklad i s řešením máme z: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/>

- Budeme prve pracovat jen s prvními dvěma rovnicemi. Uvažujme  $F : \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F : (F_1, F_2)$ , kde

$$F_1(x, y, u, v) = u - x^2 - y^2,$$
$$F_2(x, y, u, v) = v - x^2 + 2xy^2,$$

Pak  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ .

Dále  $F(1, 2, 5, -7) = [0, 0]$ .

Sestavme matici (pozor, derivujeme podle  $x$  a  $y$ ):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ -2x + 2y^2 & 4xy \end{pmatrix}$$

V bodě  $(1, 2, 5, -7)$  dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí  $U$  bodu  $(5, -7)$  a okolí  $V$  bodu  $(1, 2)$  takové, že pro každé  $(u, v) \in U$  existuje právě jedno  $(x, y) = \varphi(u, v) \in V$  splňující  $F(x, y, u, v) = 0$ . Označíme-li složky  $\varphi$  jako  $x(u, v)$  a  $y(u, v)$ , dostáváme funkce třídy  $C^\infty$  na  $U$ .

- Zderivujeme podle proměnné  $v$  rovnice :

$$u = x^2 + y^2,$$
$$v = x^2 - 2xy^2,$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}2xx_v + 2yy_v &= 0 \\ 2xx_v - 2x_vy^2 - 4xyy_v &= 1\end{aligned}$$

Dosadíme  $u = 5$ ,  $v = -7$ ,  $x(5, -7) = 1$ ,  $y(5, -7) = 2$ . Máme

$$\begin{aligned}2x_v + 4y_v &= 0 \\ -6x_v - 8y_v &= 1\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}x_v(5, -7) &= -\frac{1}{2} \\ y_v(5, -7) &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

- Derivaci funkce  $z$  získáme z řetízkového pravidla (protože funkce  $y$  a  $x$  jsou  $\mathcal{C}^\infty$ , tak jsou splněny podmínky řetízkového pravidla). Máme

$$z = \ln(y^2 - x^2)$$

Tedy

$$z_v = \frac{-2x}{y^2 - x^2}x_v + \frac{2y}{y^2 - x^2}y_v$$

Po dosazení

$$z_v(5, -7) = \frac{2}{3}$$

### Zkouškové příklady

6. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned}u &= \ln(xy) + \cos v \\ v &= e^{x-u} - y^2 - v\end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu  $[x, y, u, v] = [1, 1, 1, 0]$  hladké funkce  $x, y$  proměnných  $u, v$  takové, že  $x(1, 0) = 1$  a  $y(1, 0) = 1$ . Rozhodněte, zda existuje totální diferenciál funkce  $y(u, v)$  v bodě  $[1, 0]$  a pokud ano, nalezněte jej.

**Řešení:**

- Uvažujme  $F : \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F : (F_1, F_2)$ , kde

$$\begin{aligned}F_1(x, y, u, v) &= \ln(xy) + \cos v - u \\ F_2(x, y, u, v) &= e^{x-u} - y^2 - 2v\end{aligned}$$

Pak  $F \in \mathcal{C}^\infty((0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ .

Dále  $F(1, 1, 1, 0) = [0, 0]$ .

Sestavme matici (pozor, derivujeme podle  $x$  a  $y$ ):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ e^{x-u} & -2y \end{pmatrix}$$



V bodě  $(1, 1, 1, 0)$  dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí  $U$  bodu  $(1, 0)$  a okolí  $V$  bodu  $(1, 1)$  takové, že pro každé  $(u, v) \in U$  existuje právě jedno  $(x, y) = \varphi(u, v) \in V$  splňující  $F(x, y, u, v) = 0$ . Označíme-li složky  $\varphi$  jako  $x(u, v)$  a  $y(u, v)$ , dostáváme funkce třídy  $C^\infty$  na  $U$ .

- Zderivujme podle proměnné  $v$  rovnice :

$$\begin{aligned} u &= \ln(xy) + \cos v \\ v &= e^{x-u} - y^2 - v \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{xy}(x_v y + y_v x) - \sin v &= 0 \\ e^{x-u}(x_v - 0) - 2yy_v - 1 &= 1 \end{aligned}$$

Dosadíme  $u = 1, v = 0, x(1, 0) = 1, y(1, 0) = 1$ . Máme

$$\begin{aligned} x_v + y_v &= 0 \\ x_v - 2y_v - 1 &= 1 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} x_v(1, 1) &= \frac{2}{3} \\ y_v(1, 1) &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

- Zderivujme podle proměnné  $u$  rovnice :

$$\begin{aligned} u &= \ln(xy) + \cos v \\ v &= e^{x-u} - y^2 - v \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{xy}(x_u y + y_u x) &= 1 \\ e^{x-u}(x_u - 1) - 2yy_u &= 0 \end{aligned}$$

Dosadíme  $u = 1, v = 0, x(1, 0) = 1, y(1, 0) = 1$ . Máme

$$\begin{aligned} x_u + y_u &= 1 \\ x_u - 1 - 2y_u &= 0 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} x_u(1, 1) &= 1 \\ y_u(1, 1) &= 0 \end{aligned}$$

- Z věty o implicitních funkcích máme, že  $y(u, v)$  je třídy  $C^\infty$  - tedy má spojité 1. parciální derivace a tedy má totální diferenciál tvaru:

$$y'(1, 1)(h_1, h_2) = 0 \cdot h_1 - \frac{2}{3}h_2.$$

7. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned} u &= \ln(x^2 + y^2) - 2xy \\ v &= e^x \sin y + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu  $[x, y, u, v] = [1, 0, 0, 1]$  hladké funkce  $x, y$  proměnných  $u, v$  takové, že  $x(0, 1) = 1$  a  $y(0, 1) = 0$ . Necht' navíc je  $z$  funkce proměnných  $x$  a  $y$  definovaná na okolí bodu  $[x, y] = [1, 0]$  předpisem  $z(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  a necht'  $\Phi$  je funkce proměnných  $u$  a  $v$  definovaná na okolí bodu  $[u, v] = [0, 1]$  předpisem  $\Phi(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$ . Spočt'ete  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(0, 1)$ .

**Řešení:**

- Uvažujme  $F : \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F : (F_1, F_2)$ , kde

$$\begin{aligned} F_1(x, y, u, v) &= \ln(x^2 + y^2) - 2xy - u \\ F_2(x, y, u, v) &= e^x \sin y + \frac{1}{x^2} - v \end{aligned}$$

Pak  $F \in C^\infty(B_{\frac{1}{2}}(1, 0, 0, 1))$ .

Dále  $F(1, 0, 0, 1) = [0, 0]$ .

Sestavme matici (pozor, derivujeme podle  $x$  a  $y$ ):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} - 2y & \frac{2y}{x^2+y^2} - 2x \\ e^x \sin y - \frac{2}{x^3} & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

V bodě  $(1, 0, 0, 1)$  dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & e \end{vmatrix} = 2e + 4 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí  $U$  bodu  $(0, 1)$  a okolí  $V$  bodu  $(1, 0)$  takové, že pro každé  $(u, v) \in U$  existuje právě jedno  $(x, y) = \varphi(u, v) \in V$  splňující  $F(x, y, u, v) = 0$ . Označíme-li složky  $\varphi$  jako  $x(u, v)$  a  $y(u, v)$ , dostáváme funkce třídy  $C^\infty$  na  $U$ .

- Zderivujme podle proměnné  $u$  rovnice :

$$\begin{aligned} u &= \ln(xy) + \cos v \\ v &= e^{x-u} - y^2 - v \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + y^2}(2xx_u + 2yy_u) - 2x_u y - 2xy_u &= 1 \\ e^x x_u \sin y + e^x \cos y y_u + \frac{-2}{x^3} x_u &= 0 \end{aligned}$$

Dosadíme  $u = 0$ ,  $v = 1$ ,  $x(0, 1) = 1$ ,  $y(0, 1) = 0$ . Máme

$$\begin{aligned} 2x_u - 2y_u &= 1 \\ ey_u - 2x_u &= 0 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}x_u(0, 1) &= \frac{e}{2e - 4} \\y_u(0, 1) &= \frac{1}{e - 2}\end{aligned}$$

- Derivaci funkce  $\Phi$  dopočteme z řetízkového pravidla (protože funkce  $x$  a  $y$  jsou  $C^\infty$ , tak jsou splněny podmínky řetízkového pravidla).

$$\Phi_u = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} y \cdot \frac{-1}{x^2} x_u + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} y_u$$

Po dosazení máme

$$\Phi_u(0, 1) = \frac{1}{e - 2}$$

8. Nechť  $T : (C([0, 1]), \rho_{\text{sup}}) \rightarrow \mathbb{R}$  je zobrazení definované jako  $T(f) = \int_0^1 f(x) dx$ . Ukažte, že  $T$  je spojité.

**Řešení:** Zvolme funkci  $f_0 \in C([0, 1])$ . Zobrazení  $T$  je pak spojitě v bodě  $f_0$ , jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in C([0, 1]), \rho_{\text{sup}}(f, f_0) < \delta : |T(f) - T(f_0)| < \varepsilon,$$

kde

$$|T(f) - T(f_0)| = \left| \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f_0(x) dx \right| = \left| \int_0^1 (f(x) - f_0(x)) dx \right|$$

Zvolme  $\varepsilon > 0$  a  $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ . Zvolme  $f$  takovou, že  $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_0(x)| < \delta$ .

Pak máme

$$|T(f) - T(f_0)| = \left| \int_0^1 (f(x) - f_0(x)) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x) - f_0(x)| dx \leq \int_0^1 \delta dx = \delta < \varepsilon.$$

Tedy  $T$  je spojitě v  $f_0$ .