# 9. cvičení – Více implicitních funkcí

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Teorie

**Věta 1.** Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}$, $[\bar{x}, \bar{y}] \in G$ a nechť platí:

1. $F \in C^k(G)$
2. $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$
3. $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \\ & \ddots & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí bodu $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\bar{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\bar{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto $y$ symbolem $\varphi(x)$, pak pak $\varphi \in C^k(U)$.

## Příklady

1. Jsou dány vztahy
$$e^{u/x} \cos(v/y) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$
$$e^{u/x} \sin(v/y) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$
Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu $[1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]$ funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ třídy $C^\infty$. Spočtěte parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial x}$.

2. Ukažte, že existují funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ definované na nějakém okolí $U$ bodu $[1, 2]$, které jsou na $U$ třídy $C^1$, splňují $u(1, 2) = 0$, $v(1, 2) = 0$ a platí pro ně rovnice
$$xe^{u+v} + 2uv = 1$$
$$ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$
Spočtěte $u'(1, 2)$ a $v'(1, 2)$.

3. Dokažte, že existují funkce $z(x, y)$ a $t(x, y)$, které jsou třídy $C^\infty$ na nějakém okolí $U$ obsahujícím $[1, -1]$ a splňují rovnice
$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0$$
$$x + y + z - t - 2 = 0,$$
spolu se vztahy $z(1, -1) = 2$ a $t(1, -1) = 0$.
Spočtěte $z''(1, -1)$.

4. Ukažte, že rovnice
$$x = u + v^2$$
$$y = u^2 - v^3$$
definují na jistém okolí bodu $[3,3]$ funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$ třídy $C^\infty$, které splňují $u(3,3) = 2$, $v(3,3) = 1$. Spočtěte $z_{xy}(3,3)$, pokud $z = 2uv$.

5. Spočtěte $x_v$, $y_v$ a $z_v$, pokud
$$u = x^2 + y^2,$$
$$v = x^2 - 2xy^2,$$
$$z = \ln(y^2 - x^2)$$
v bodě $u = 5$, $v = -7$, $x(5,-7) = 1$ a $y(5,-7) = 2$.
(Rada: Prve řešte první dvě rovnice pomocí Věty o implicitních funkcích, $z_v$ pak vyjádřete řetízkovým pravidlem.)

**Zkouškové příklady**

6. Ukažte, že vztahy
$$u = \ln(xy) + \cos v$$
$$v = e^{x-u} - y^2 - v$$
definují na jistém okolí bodu $[x,y,u,v] = [1,1,1,0]$ hladké funkce $x, y$ proměnných $u, v$ takové, že $x(1,0) = 1$ a $y(1,0) = 1$. Rozhodněte, zda existuje totální diferenciál funkce $y(u,v)$ v bodě $[1,0]$ a pokud ano, nalezněte jej.

7. Ukažte, že vztahy
$$u = \ln(x^2 + y^2) - 2xy$$
$$v = e^x \sin y + \frac{1}{x^2}$$
definují na jistém okolí bodu $[x,y,u,v] = [1,0,0,1]$ hladké funkce $x, y$ proměnných $u, v$ takové, že $x(0,1) = 1$ a $y(0,1) = 0$. Nechť navíc je $z$ funkce proměnných $x$ a $y$ definovaná na okolí bodu $[x,y] = [1,0]$ předpisem $z(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ a nechť $\Phi$ je funkce proměnných $u$ a $v$ definovaná na okolí bodu $[u,v] = [0,1]$ předpisem $\Phi(u,v) = z(x(u,v), y(u,v))$. Spočtěte $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(0,1)$.

## Teorie

8.❀ Nechť $T : (C([0,1]), \rho_{\text{sup}}) \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované jako $T(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Ukažte, že $T$ je spojité.

(8) Ukažte z definice. Tedy že $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in C([0,1]),\ \rho_{\text{sup}}(f, f_0) < \delta : |T(f) - T(f_0)| < \varepsilon$.