6. cvičení – Totální diferenciál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. *Parciální derivací funkce f v bodě $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ podle proměnné x_i definujeme jako limitu*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}.$$

Definice 2. Derivace (totální diferenciál)

Nechť je dána reálná funkce n-proměnných $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definovaná na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$. Pokud existuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0,$$

potom toto lineární zobrazení L značíme $df(a)$ nebo také $f'(a)$ a nazýváme jej **derivací** nebo také **totálním diferenciálem** funkce f v bodě a. Zobrazení, které bodu a přiřazuje $df(a)$, resp. $f'(a)$, značíme df, resp. f' a nazýváme jej diferenciálem funkce f.

Věta 3. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál $df(a)$ v bodě a. Potom $df(a)$ je lineární zobrazení, které vektoru $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ přiřazuje číslo $df(a)(h)$ a platí, že

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i.$$

Věta 4. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, jejíž všechny parciální derivace jsou **spojité** v bodě a. Potom funkce f má v bodě a totální diferenciál určený předpisem

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} dx_i.$$

Hinty

$$2|xy| \leq x^2 + y^2, \qquad \pm 2xy \leq x^2 + y^2$$

$$\max\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$$

$$|a|^3 + |b|^3 \leq (|a| + |b|)(|a|^2 + |b|^2)$$

Algoritmus - Totální diferenciál $f(x, y)$

1. Určíme **definiční obor** $f(x, y)$.
2. Pokud je to potřeba, **spojitě dodefinujeme** funkci $f(x, y)$. (Stačí dodefinovat např. dvojnásobnou limitou, případnou spojitost dá existence tot. diferenciálu.)

3. Spočteme **parciální derivace** mechanicky nebo podle definice (jako minule) všude, kde to jde (nebo v bodě, na který jsme tázáni).
4. Spočteme **totální diferenciál**.
   (a) Jestliže má funkce v daném bodě spojité parciální derivace, pak je totální diferenciál dán předpisem z Věty 4.
   (b) Jestliže funkce má parciální derivace (ale nejsou spojité nebo nevíme, zda jsou spojité), dopočítáme totální diferenciál z definice - kandidátem jsou pak parciální derivace.
   (c) Jestliže funkce někde není spojitá nebo dokonce definovaná, totální diferenciál tam funkce nemá.
   (d) Jestliže parciální derivace v nějakém bodě neexistují nebo nejsou vlastní, totální diferenciál tam funkce nemá.

Příklady

1. Určete definiční obor, parciální derivace a totální diferenciál následujících funkcí

   (a) $x^2 - 2xy - 3y^2$ (b) $\arctan \dfrac{x-y}{x+y}$ (c) $xy \log(x+y)$

2. Určete parciální derivace a tot. diferenciál v bodě $(0,0)$:

   (a)✿ $|y| \sin x$
   (c)♡ $\sqrt{|x|^3 + |y|^3}$
   (b)❄ $\cos \sqrt[3]{xy}$
   (d)☆ $\sqrt[3]{xy}$

   (e)❀ $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

3.✤ Dodefinujte funkci $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.

4.✻ Dodefinujte funkci $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.

5.❀ Lze dodefinovat funkci $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \ln(1+xy)$ na nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla totální diferenciál?

6. Ověřte z definice totální diferenciál funkce $x^2 + y^2$ v bodě $[x_0, y_0]$.

(2a) $2|xy| \leq x^2 + y^2$
(2b) Limitu pro totální diferenciál budeme počítat zvlášť pro osy h_1 a h_2 a zvlášť pro zbytek definičního oboru. Když limity vzhledem k těmto množinám vyjdou všechny stejně, existuje i celková limita.
(2c) $\sqrt{|h_1|^3 + |h_2|^3} \leq \sqrt{(|h_1| + |h_2|)(|h_1|^2 + |h_2|^2)}$
(2d) limity po přímce $h_1 = 0$, $h_1 = h_2$
(2e) omezená a mizející
(3) $2|xy| \leq x^2 + y^2$
(4) limity po přímce $h_2 = 0$, $h_1 = h_2$
(5) limita po přímce $h_1 = h_2$